Übung 4 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 22.05.2020 / Besprechung: 25.05.2020

1. **Fouriertransformationen** (6)
   Berechne von
   $$\tilde{f}\,(k) = \frac{A \sin{(\alpha k)}}{\alpha k}\,, \tag{1}$$
   explizit die Rücktransformation
   $$f\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \tilde{f}\,(k)\, e^{ikx}. \tag{2}$$
   ($\tilde{f}$ ist übrigens das Ergebnis zu Aufgabe 2(a) Übung 3.)

   Beobachte zunächst, daß $\tilde{f}(k)$ auf der ganzen komplexen Ebene holomorph ist.

   Führe eine Fallunterscheidung durch. Zeige, daß für $x < -\alpha$ und $x > \alpha$ der k-Integrationsweg direkt mittels eines geeigneten Halbkreises (für welchen Fall wohin legen?) geschlossen werden kann. In diesen Fällen ist das Ergebnis sofort bekannt (Wert?).

   Der schwierige Fall ist $|x| < \alpha$. Hier divergiert der Integrand in (2) sowohl für $\operatorname{Im} k \to +\infty$ wie für $\operatorname{Im} k \to -\infty$ (warum?). Dies gilt nicht für die Summanden, die sich ergeben, wenn Sie die sin-Funktion als Summe zweier exp-Funktionen schreiben. Vorsicht: Bevor Sie das Integral als Summe ähnlicher Fourier-Integrale für $\exp(\pm \mathrm{i}\alpha k)/k$ schreiben (bei $k = 0$ liegt eine Singularität!), müssen Sie den Integrationsweg entweder über die reelle Achse oder unter die reeelle Achse legen, was nach Cauchy erlaubt ist, da $\tilde{f}(k)$ holomorph ist. Danach zerlegen Sie die sin-Funktion, erhalten zwei Einzelintegrale, die Sie in unterschiedlicher Weise behandeln: eines in der oberen, das andere in der unteren Halbebene schließen.

2. **Potenzreihe** (5)
   Entwickle
   $$f(z) = \frac{z}{z-1}$$
   um $z_0 = 2$ in eine Potenzreihe und bestimme den Konvergenzradius. Skizziere in der komplexen Ebene den Bereich, für den die Reihe konvergiert. Hinweis: Benutze die geometrische Reihe
   $$\sum_0^\infty w^n = \frac{1}{1-w}\,, \qquad |w| < 1$$
   deren Konvergenzradius 1 ist.

3. **Äquipotentiallinien** (9)
   Der Realteil der Funktion
   $$f\,(z) = q \log{(z-a)} - q \log{(z+a)}$$
   ist eine harmonische Funktion und beschreibt ein Potential, das von einer Ladung q bei a und einer Ladung $-q$ bei $-a$ erzeugt wird.

   (a) Finde die Äquipotentiallinien des Realteils. Schreibe dabei den Realteil als $\operatorname{Re} f\,(z) = q \ln c$. Bringe die Gleichung auf die Form $|z - z_0|^2 = r^2$. Wie hängen z_0 und r von a und c ab?

   (b) Welche geometrischen Figuren werden durch diese Gleichung beschrieben?

   (c) Untersuche die beiden Grenzfälle $c \to 0$ und $c \to 1$. Was ergibt sich für $c > 1$? Skizziere einige Äquipotentiallinien unter Benutzung von Maple, Mathematica, Python...