Übung 11 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 10.07.2020 / Besprechung: 13.07.2020

Hinweis zur Vorlesung:
ab dem 29.06.2020 einschließlich findet die Montagsvorlesung ab 15:00 statt!

1. **Leistungsspektrum in 1d** (10)
In der Vorlesung wurde die Analyse der kosmischen Hintergrundsstrahlung mittels Kugelflächenfunktionen besprochen. Es wurde dabei genutzt, daß die Kugelflächenfunktionen ein vollständiges Funktionensystem darstellen für Funktionen auf der 2-dimensionalen Sphäre. Wir wollen hier den einfacheren Fall der 1-dimensionalen Sphäre in Form einer Übungsaufgabe behandeln.

Wir betrachten eine "Temperaturfunktion", die nur von einem Winkel ϕ abhängt, d.h. $T(\phi)$ und 2π-periodisch ist. Wir wollen die Schwankungen um den Mittelwert untersuchen. Wir entwickeln dazu $T(\phi)$ nach Eigenfunktionen von

$$-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\,. \tag{1}$$

- Überlege zunächst, daß die Eigenwerte von (1) genau die ganzen Zahlen sind, die Eigenfunktionen sind ebene Wellen und die angestrebte Entwicklung nichts anderes als die Fourierdarstellung ist. Wir nennen die Entwicklungskoeffizienten $\tilde{T}_k$.
- Wir wechseln nun das Koordinatensystem bzw. wenden auf die Temperaturverteilungsfunktion $T(\phi)$ eine Drehung um den Winkel ϕ_0 bzw. eine Spiegelung an und erhalten $T(\phi-\phi_0)$ und $T(-\phi)$. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten dieser Funktionen?
- Zeige, daß
$$C_k := |\tilde{T}_k|^2 + |\tilde{T}_{-k}|^2 \tag{2}$$
eine koordinatenunabhängige Größe, also konstant unter den genannten Transformationen ist.
- Wir definieren Abbildungen P_k ($k \in \mathbb{Z}$) auf dem Raum der betrachteten Funktionen $\psi : [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ durch
$$P_k\psi = \phi \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi}}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varphi}\psi(\varphi) \tag{3}$$
Zeigen Sie, daß P_k eine Projektion auf einen 1-dimensionalen Unterraum darstellt. Zeigen Sie unter anderem, daß
$$P_k \cdot P_n = \delta_{k,n}P_k\,. \tag{4}$$
- Überlege
$$P_k + P_{-k} \tag{5}$$
ist der Projektor auf den zweidimensionalen Raum des Eigenwertes k^2 von
$$-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,. \tag{6}$$
Dieser Raum ist invariant unter den oben behandelten Koordinatentransformationen.
- Zeige, daß C_k der Erwartungswert
$$C_k = \langle T|(P_k + P_{-k})T\rangle \tag{7}$$
ist.

2. **Erzeugende Funktion der Legendre-Polynome** (10)
Wir betrachten die zweiparametrige Funktion

$$w(x,u) := \frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}\,, \qquad x \in [-1,+1] \text{ und } u \text{ in der Nähe von } 0\,. \tag{8}$$

Diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}w = u\frac{\partial^2}{\partial u^2}(u\,w)\,. \tag{9}$$

(Achtung: alle Operationen sind von rechts nach links durchzuführen.)

- Beweise (wenn möglich) Gleichung (9). Dies ist elementar, wenngleich etwas unangenehm.
- Die Funktion $w(x,u)$ ist bzgl. u in eine Reihe um $u=0$ entwickelbar, wobei die Entwicklungskoeffizienten Polynome $Q_n(x)$ in x sind

$$w(x,u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)u^n\,. \tag{10}$$

  Bestimme die $Q_n(x)$ nicht explizit, sondern zeige, daß (10) in (9) eingesetzt die DGL

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}Q_n(x) = n(n+1)Q_n(x)\,, \tag{11}$$

  liefert. Dies ist die DGL des Legendre-Polynoms $P_n(x)$. Warum ist Q_n proportional zu P_n? Oder anders gefragt: Was ist die zweite Lösung der DGL, die ja zweiter Ordnung ist. Überlege dies explizit an Hand des Falles $n=0$ und finde beide Lösungen explizit.

Tatsächlich gilt $Q_n = P_n$, was wir mit Betrachtung der Normierung zu zeigen hätten. Die Funktion $w(x,u)$, deren Ableitungen nach u die Legendre-Polynome liefert, heißt "Erzeugende Funktion" der Legendre-Polynome.

Umgekehrt kann die Identität

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)u^n\,, \tag{12}$$

benutzt werden, um die linke Seite zu berechnen. Dies liegt der Gleichung (3.93) der Vorlesung zu Grunde.