Übung 10 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2020

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Dennis Wagner (dennis.wagner@uni-wuppertal.de D.10.04)

Abgabe: 03.07.2020 / Besprechung: 06.07.2020

Hinweis zur Vorlesung:
ab dem 29.06.2020 einschließlich findet die Montagsvorlesung ab 15:00 statt!

1. **Möbiustransformationen** (7)
   Betrachte die Abbildung
   $$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } ad-bc=1 \text{ und } a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$
   Wir interessieren uns für das Verhalten dieser Abbildung, insbesondere wie sich der Punkt $-i$, der Kreis $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$,$\varphi \in [0, 2\pi)$, und die Gerade $t \mapsto i + t$,$t \in \mathbb{R}$, in den vier Fällen

   (a) $a = d = 1$, $b = i$, $c = 0$,
   (b) $a = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $b = c = 0$, $d = e^{-\frac{\pi i}{4}}$,
   (c) $a = \sqrt{3}$, $b = c = 0$, $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
   (d) $a = d = 1$, $b = 0$, $c = i$,

   transformieren. Fertige hierzu jeweils eine Skizze an, die das Verhalten der Abbildung zeigt (Urbild und Bild in ein Koordinatensystem einzeichnen) und begründe diese!

2. **Harmonische Funktionen in 2d** (13)
   Wir untersuchen zylindersymmetrische Probleme der Elektrostatik bzw. Hydrodynamik, d.h. reellwertige Funktionen $u = u(x, y)$. Außerhalb von Ladungen oder Berandungen der Geometrie soll gelten $\Delta u = 0$.

   A) Wir suchen zunächst alle harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeige, daß diese wie folgt dargestellt werden können
   $$u(x, y) = \mathrm{Re} f(z) + d \log |z| , \tag{1}$$
   wobei $f(z)$ eine geeignete holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist und d eine Konstante. (Wir identifizieren natürlich $z = x + \mathrm{i}y$ etc.) Gehe dazu wie folgt vor

   - Betrachte die Cauchy-Riemann-DGL für $u(x, y)$ und eine "Partnerfunktion" $v(x, y)$. Die Differentialgleichung für $v(x, y)$
     $$\vec{\nabla} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} v \\ \frac{\partial}{\partial y} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} u \\ \frac{\partial}{\partial x} u \end{pmatrix} , \tag{2}$$
     kann (zumindest lokal) aufintegriert werden. Warum? Mit
     $$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) , \tag{3}$$
     haben wir nun eine zumindest lokal definierte holomorphe Funktion $f(z)$, so daß (1) lokal erfüllt ist mit $d = 0$, also ohne log-Term.
   - Wir betrachten nun explizit den Fall, daß 0 nicht zum Definitionsbereich von $u(x, y)$ gehört. Unter anderem kann $u(x, y)$ bei 0 singulär sein. Vor allem kann das reelle Wegintegral ("wie aus Physik I" bzw. Mechanik bekannt) des Vektorfeldes auf der rechten Seite von (2) für einen Weg, der den Ursprung einmal umläuft, gleich einer Zahl $I \neq 0$ sein. Definiere $d := I/2\pi$. Zeige nun
     $$u(x, y) - d \log |z|$$

ist harmonisch und hierzu existiert eine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte holomorphe Funktion, so daß

$$u(x,y) - d\,\log|z| = \mathrm{Re} f(z)\,, \tag{4}$$

also (1) global erfüllt ist.

- Stelle für $f(z)$ die allgemeinste Laurent-Reihe auf mit Entwicklungskoeffizienten $c_n = a_n + \mathrm{i} b_n$ (a_n, b_n reell). Werte (1) explizit aus und schreibe $u(x,y)$ als Reihe über Potenzen von r mit ϕ-abhängigen Koeffizienten, wobei $z = r\exp(\mathrm{i}\phi)$, plus dem $\log r$-Term.

B) Wir wenden die allgemeinen Erkenntnisse an auf einen unendlich langen Stab mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius R. Das Material des Stabes ist homogen und hat die Dielektrizitätskonstante ϵ. Der Stab werde in ein unendlich ausgedehntes homogenes elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E\vec{e}_x$ gebracht. Der Stab stehe senkrecht zur $x-y$-Ebene. Wir interessieren uns für das elektrische Feld, das sich im Inneren des Stabes ausbildet, und für die Modifikation des äußeren Feldes.

- Stelle einen Ansatz für das Potential Φ innen und außen auf. Benutze dazu unabhängige Ansätze vom Typ (1) bzw. Reihen wie im letzten Unterpunkt hergeleitet mit separaten Koeffizientensätzen für innen und außen. Was folgt aus den "Randbedingungen": (i) außen wächst das Potential als Funktion von $r = |z|$ maximal linear, (ii) innen ist das Potential divergenzfrei, insbesondere bei $r = 0$?
- Bestimme die Koeffizienten der Reihen aus der Bedingung $\Phi_{\text{aussen}} \simeq -Ex$, und der Stetigkeit von Φ selbst und der Stetigkeit der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ am Stabrand, d.h. bei $r = R$.
Tipp: Die meisten Terme in der allgemeinen Entwicklung haben null als Koeffizient.
- Das elektrische Feld im Außenbereich ist nicht mehr konstant, sondern besitzt eine Dipolkomponente. (Achtung r-Abhängigkeit in 2 Dimensionen ist anders als in 3 Dimensionen.) Wo befinden sich die Ladungen, die dieses Feld erzeugen, und was ist die genaue Verteilung?