

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionentheorie	3
1.1	Komplexe Zahlen und Funktionen	3
1.2	Holomorphe Funktionen	4
1.3	Konturintegrale	9
1.4	Spezielle Funktionen	19
1.5	Anwendungen (harmonische Funktionen, Cauchy)	22
1.5.1	Elektrostatik	22
1.5.2	Dirichlet-Randwertproblem für eine Scheibe	27
1.5.3	Kontinuumsmechanik	28
1.6	Potenzreihen	32
1.7	Laurent-Reihen	35
1.8	Isolierte Singularitäten, holomorphe Fortsetzungen	36
2	Fourier-Transformation	43
2.1	Fourier-Reihen	43
2.2	Anwendung Fourierreihe in der Physik	46
2.3	Fourier-Integrale	54
2.4	Allgemeine Rechenregeln	56
2.5	Anwendungen	60
2.5.1	Zentraler Grenzwertsatz	60
2.5.2	Funktionalgleichungen	64
2.6	Höherdimensionale Fourierintegrale	65
2.7	Anwendungen	66
2.7.1	Coulomb-/Yukawa-Potential	66
2.7.2	Numerik	67
3	Funktionalanalysis	68
3.1	Der quantenmechanische 1-dimensionale harmonische Oszillator	71
3.2	Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)	76
3.2.1	Simultane Diagonalisierung von \vec{L}^2 und L_z (ab hier $\hbar \equiv 1$)	79
3.2.2	Harmonische Funktionen im \mathbb{R}^3	82
3.2.3	Multipolentwicklung	83
3.2.4	Anwendungen als vollständiges Funktionensystem auf S^2	85
3.2.5	Nachtrag zu Kugelflächenfunktionen	87
3.2.6	Anwendungen in der Elektrodynamik	89
3.3	Distributionen	92
4	Anhang	104

1 Funktionentheorie

Der Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wird als bekannt vorausgesetzt.

Frage: Wie berechnet man folgende Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx ? \quad (1.1)$$

Wir werden in dieser Vorlesung Mittel und Wege kennenlernen, die dies leicht ermöglichen.

1.1 Komplexe Zahlen und Funktionen

Wir betrachten komplexwertige Funktionen

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit der Menge } \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.2a)$$

$$z \mapsto f(z) \quad \text{und } U \text{ ist offene Teilmenge von } \mathbb{C} \quad (1.2b)$$

Definition 1.1. Zerlegung nach Real- und Imaginärteil

$$z = x + iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad (1.3a)$$

$$\text{statt } (x, y) \text{ oder } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.3b)$$

so daß die Multiplikation \cdot "automatisch" richtig durchgeführt wird, wenn $i^2 = -1$ beachtet wird. Analog

$$f(z) = g(z) + ih(z), \quad \text{mit reellwertigen } g, h. \quad (1.4)$$

Definition 1.2. Komplexe Konjugation

$$\bar{z} := x - iy, \quad (1.5)$$

mit obiger Notation für z .

Vorsicht: Wenn Objekte $\overline{f(z)}$ und $\bar{f}(z)$ nebeneinander benutzt werden, so ist mit \bar{f} folgendes gemeint

$$\bar{f} : z \mapsto \overline{f(\bar{z})}. \quad (1.6)$$

In Worten: $\overline{f(z)}$ ist die komplexe Konjugation des Funktionswertes von z bzgl. f ist, wohingegen $\bar{f}(\bar{z})$ die komplexe Konjugation des Funktionswertes des konjugierten \bar{z} bzgl. f bezeichnet.

Definition 1.3. Betrag, Polarkoordinaten

$$\text{Betrag } |z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}, \quad z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \text{mit geeigneter Phase } \phi \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Beispiel(e) 1.1. Komplexe Konjugation und Notation

a) Für $f(z) := x^2 + y^2 + i2xy$ gilt

$$\overline{f(z)} = x^2 + y^2 - i2xy, \text{ aber } \overline{f(z)} = x^2 + y^2 + i2xy. \quad (1.8)$$

Bemerkung: diese Funktion ist nicht holomorph in z . Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

b) Für $f(z) := x^2 - y^2 + i2xy = z^2$ gilt

$$\overline{f(z)} = \overline{z^2} = \bar{z}^2, \quad \overline{f(z)} = z^2. \quad (1.9)$$

c) Für $f(z) := ix - y = iz$ gilt

$$\overline{f(z)} = -ix - y = -i\bar{z}, \quad \overline{f(z)} = -iz. \quad (1.10)$$

Bemerkung: Wenn eine Funktion durch Angabe des Funktionswertes mit expliziten Ausdrücken in Real- und Imaginärteil, d.h. x und y , gegeben ist, so kann sie durch z und \bar{z} "geschrieben" werden, indem

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (1.11)$$

eingesetzt wird. Im Beispiel a) erhält man so

$$f(z) = \frac{1}{4}(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - \frac{1}{4}(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + \frac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}\bar{z}^2 + z\bar{z} \quad (1.12)$$

Man sieht, daß $f(x, y)$ durch z und \bar{z} geschrieben im Falle a) ein Ausdruck mit beiden Argumenten z und \bar{z} ist, in den Fällen b) und c) taucht jeweils nur z auf.

1.2 Holomorphe Funktionen

Komplexe Differenzierbarkeit ist mehr als Differenzierbarkeit von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Funktionen.

Definition 1.4. (Komplexe Differenzierbarkeit) Eine Funktion f heißt in einem Punkt z_0 komplex differenzierbar, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + o(z - z_0), \quad (1.13)$$

wobei $o(z - z_0)$ eine Restfunktion "von höherer Ordnung", d.h. kleiner als $z - z_0$ bedeutet, also

$$\frac{o(z - z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0. \quad (1.14)$$

Oder auch:

- (i) $f(z)$ ist linear approximierbar in z_0 .
- (ii) Konvergenz des Differenzenquotienten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} a. \quad (1.15)$$

Bemerkung: Die Formulierung (1.13) sieht genauso wie die der Differenzierbarkeit von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Funktionen aus. Achtung: In (1.13) wird verlangt, daß die als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefaßte Operation $a \cdot$ eine Dreh-Streckung (oder Dreh-Stauchung) ist, siehe weiter unten. Die Zahl a in (1.13) heißt die (komplexe) Ableitung von $f(z)$ nach z in z_0 . Man schreibt wie im Reellen $f'(z_0)$ ($:= a$).

Definition 1.5. (*Holomorphie*)

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, die überall auf U (offene Teilmenge von \mathbb{C}) komplex differenzierbar ist, heißt holomorph.

Beispiel(e) 1.2. *Komplexe (Nicht-) Differenzierbarkeit*

a) $f(z) := z$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 1, \quad (1.16)$$

für jedes z_0 . Tatsächlich ist der Differenzenquotient konstant gleich 1.

b) $f(z) := \bar{z}$ ist sicherlich reell differenzierbar, aber

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0}?, \quad (1.17)$$

Wir wollen zeigen, daß der Grenzwert nicht existiert bzw. von der ‘‘Richtung’’ $z \rightarrow z_0$ abhängt. Wir kürzen ab $\zeta := z - z_0$.

- (i) Falls ζ rein reell ist, dann gilt $\bar{\zeta}/\zeta = \zeta/\zeta = 1$,
- (ii) falls ζ rein imaginär ist, dann gilt $\bar{\zeta}/\zeta = -\zeta/\zeta = -1$,

und damit existiert kein von der gewählten Folge von Punkten z nach z_0 unabhängige Grenzwert.

Die Funktion $z \mapsto \bar{z}$ ist in keinem Punkt z_0 komplex differenzierbar.

c) $f(z) := \operatorname{Re} z = x$ ist nicht komplex differenzierbar.

Dies versteht man am besten durch die Umschreibung $f(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, was die Summe einer komplex differenzierbaren und einer nicht komplex differenzierbaren Funktion ist.

Aber alle Funktionen a)-c) sind reell differenzierbar.

Theorem 1.1. *Summen, Produkte, Quotienten, Verkettungen, Umkehrungen von holomorphen Funktionen sind holomorph.*

Die bekannten Funktionen $\exp, \log, \sin, \cos, \dots$, die über Reihendarstellungen definiert sind, können auch im Komplexen definiert werden und sind im Konvergenzbereich holomorph. (Die Logarithmusfunktion \log ist zunächst innerhalb eines Kreises des Radius 1 um 1 definiert, kann aber holomorph fortgesetzt werden. Mehr später.)

Warum ist komplexe Differenzierbarkeit mehr als reelle Differenzierbarkeit? (Die Antwort ist im Prinzip oben gegeben, aber nicht die Konsequenzen.)

Erinnerung Reelle Differenzierbarkeit einer Abbildung $f = (g, h) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ liegt in $z_0 = (x_0, y_0)$ vor, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (d.h. 2×2 -Matrix) existiert, so daß

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(z - z_0) \quad (1.18)$$

oder noch expliziter

$$\begin{pmatrix} g(z) \\ h(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right), \quad (1.19)$$

wobei die Restfunktion (jetzt wieder mit z geschrieben) von Ordnung kleiner als $z - z_0$ ist: $\|o(z - z_0)\| / \|z - z_0\| \rightarrow 0$ für jede Folge z gegen z_0 (hier ist $\|\dots\|$ die Euklidische Norm).

Jede komplex differenzierbare Funktion erfüllt auch dieses Kriterium, aber nicht jede Funktion, die "ein A besitzt" ist auch komplex differenzierbar.

Für ein $f = g + ih = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ wie oben gilt

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Wenn diese lineare Abbildung eine Dreh-Streckung darstellen soll, müssen die Diagonalelemente identisch und die Nebendiagonalen die negativen voneinander sein

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \underline{\text{Cauchy-Riemann DGL}}. \quad (1.21)$$

Wir können diese DGL auch im Formalismus der komplexen Differenzierbarkeit mittels Differenzenquotient herleiten. Der Limes in (1.15) existiert genau dann und ist insbes. unabhängig von der Richtung der Folge $z \rightarrow z_0$, wenn reelle Differenzierbarkeit vorliegt und in

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f, & \text{für } z - z_0 \text{ reell,} \\ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f, & \text{für } z - z_0 \text{ imaginär,} \end{cases} \quad (1.22)$$

die beiden Ergebnisse übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} (g + ih) = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} (g + ih) = -i \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (1.23)$$

was auf (1.21) führt.

Definition 1.6. (*Wirtinger-Ableitungen*) Für eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die reell differenzierbar ist, können wir das reelle Differential schreiben als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (1.24)$$

wobei die Multiplikation als skalare Multiplikation von Vektoren in \mathbb{R}^2 mit Elementen in \mathbb{R} durchgeführt wird, aber mit der Multiplikation in \mathbb{C} kompatibel ist (da der zweite Faktor reell ist). Mit (1.11)

$$df = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}. \quad (1.25)$$

Es macht daher Sinn die partiellen Ableitungen von f nach z und \bar{z} wie folgt zu definieren

$$\frac{\partial}{\partial z} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (1.26)$$

Bemerkung: Genau dann, wenn die Cauchy-Riemann DGL (1.21) erfüllt sind, ist $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$ null und $\frac{\partial}{\partial z} f$ ist gleich f' .

In jedem Fall, wenn f reell differenzierbar ist, gilt

$$df = \frac{\partial}{\partial z} f \cdot dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \cdot d\bar{z}, \quad (1.27)$$

wobei \cdot die komplexe Multiplikation bezeichnet, woraus folgt, daß die Ableitungen von f nach z bzw. \bar{z} so gewonnen werden können, daß Sie zunächst $f(x, y)$ durch z und \bar{z} ausdrücken, dann z und \bar{z} als unabhängige komplexe Variable ansehen und nach z bzw. \bar{z} (komplex) differenzieren.

Beispiel(e) 1.3. (Cauchy-Riemann)

(i) Sei $f(z) = x^3 y^2 + i x^2 y^3$

$$\text{Cauchy - Riemann : } 3x^2 y^2 = 3x^2 y^2 \text{ und } 2x^3 y = -2xy^3. \quad (1.28)$$

Die erste Bedingung ist immer erfüllt, die zweite nur, wenn $xy = 0$ oder $x^2 + y^2 = 0$, also nur auf den Koordinatenachsen. Es gibt keine offene Untermenge von \mathbb{C} , in der die Cauchy-Riemann DGL erfüllt sind.

(ii) Sei $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$$\text{Cauchy - Riemann : } e^x \cos y = e^x \cos y \text{ und } e^x (-\sin y) = -e^x \sin y. \quad (1.29)$$

Hier sind beide Bedingungen überall erfüllt.

Dies erkennt man auch mittels

$$f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z, \quad (1.30)$$

wobei zugegebenermaßen einige Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion sowie der trigonometrischen Funktionen benutzt wurden, die ja erst noch (mittels Holomorphie) zu beweisen sind.

Theorem 1.2. Jede holomorphe Funktion $f = g + ih$ ist harmonisch, insbes. sind Real- und Imaginär-Teil harmonische Funktionen, explizit für g

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g = 0, \quad (1.31)$$

und analog für h .

Beweis. Wir benutzen (beweisen allerdings erst später), daß holomorphe Funktionen direkt zweimal differenzierbar sind und setzen die Cauchy-Riemann DGL ineinander ein

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} g}_{=\frac{\partial}{\partial y} h} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} h = \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} h}_{=-\frac{\partial}{\partial y} g} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} g. \quad (1.32)$$

□

Bemerkung: In der Elektrodynamik bzw. -Statik, Hydrodynamik mit Zylindersymmetrie werden Lösungen der Laplace-Gleichung durch holomorphe Funktionen geliefert.

Theorem 1.3. (Lokal konstante Funktionen)

Sei f eine holomorphe Funktion, dann folgt aus jeder der folgenden Bedingungen, daß f (auf jeder Zusammenhangskomponente des Definitionsbereichs) konstant ist

- (i) $f'(z) = 0$,
- (ii) f ist rein reell (alternativ: rein imaginär),
- (iii) $|f(z)| = \text{konstant}$.

Beweis. Wir führen alle drei Fälle, evtl. nach Konstruktion geeigneter Hilfsfunktionen, auf die Charakterisierung durch verschwindende Ableitungen zurück.

- (i) direkt nach reeller Analysis,
- (ii) $f = g + i0$, Cauchy-Riemann: $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$,
- (iii) OBdA betrachten wir den Fall $|f(z)| = 1$. Wir nutzen den (holomorphen) komplexen Logarithmus und dessen "Rechenregeln" (insbes. $\log z = \log(|z| \cdot e^{i\phi}) = \log|z| + i\phi$): $\log f(z) = \text{Re} \log f(z) + i \text{Im} \log f(z) = \log|f(z)| + i \text{Im} \log f(z) = 0 + i \text{Imaginärteil}$. Dann ist nach (ii) die holomorphe Funktion $\log f(z)$ konstant und damit auch $f(z)$ konstant.

□

1.3 Konturintegrale

Definition 1.7. *Integrationsweg (Weg, Kontur) bezeichnet eine stückweise stetig differenzierbare Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Wenn $\dot{\gamma} \neq 0$ überall, dann heißt der Weg glatt. Wenn Anfangspunkt=Endpunkt, dann heißt der Weg geschlossen.*

Definition 1.8. *(Weg-, Kontur-Integral)*

Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (oder Teilmengen) definieren wir das Wegintegral entlang eines Weges γ durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{stetig}} \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{stetig}} dt, \quad (1.33)$$

wobei das Integral existiert wie in Analysis I.

Man mag sich Fragen stellen wie

- Ist das Integral unabhängig von einer Umparametrisierung des Weges? Antwort: ja.
- Hängt das Integral nur von Anfangs- und End-Punkt des Weges ab? Antwort: Dies gilt für bestimmte komplexwertige Funktionen f . Wir werden sehen, daß dies wieder auf den Begriff der Holomorphie führt.

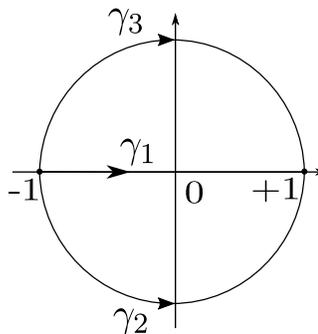
Bevor wir die allgemeine Theorie weitertreiben, hier ein paar Beispiele.

Beispiel(e) 1.4.

$f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Fälle $n \geq 0$, $n = -1$, $n < -1$ "verhalten sich" verschieden.

Wir betrachten drei Wege.



(i) Gerader Weg

$$\gamma_1 : \begin{array}{l} [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto t \end{array} \quad \dot{\gamma}_1 = 1, \quad (1.34a)$$

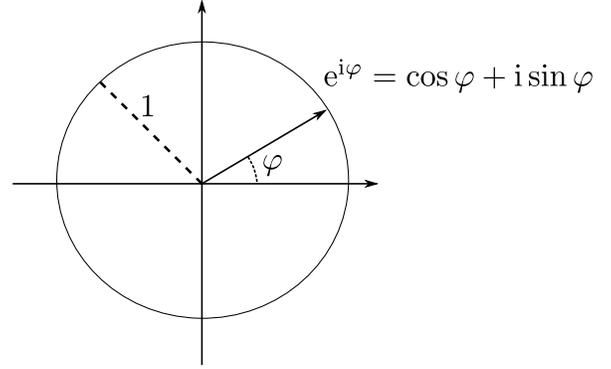
Dieser Weg führt durch 0, wo sich für $n < 0$ eine Singularität befindet. Das Integral von $f(z)$ entlang γ_1 existiert daher nur für $n \geq 0$.

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-1}^1 t^n \cdot 1 \cdot dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1.35)$$

(ii) Wir parametrisieren die untere Halbkreislinie mit einem Winkel von $-\pi$ bis 0

$$\gamma_2 : \quad [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \dot{\gamma}_2(t) = i e^{it}, \quad (1.36a)$$

$$t \mapsto e^{it}$$



Wir integrieren

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-\pi}^0 (e^{it})^n \cdot i e^{it} \cdot dt = i \int_{-\pi}^0 e^{(n+1)it} dt \quad \underbrace{=}_{\text{nur für } n \neq -1} \frac{1}{n+1} e^{(n+1)it} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}. \quad (1.37)$$

Man sieht, daß für $n \geq 0$ das gleiche Ergebnis wie bei (i) vorliegt. Für $n < 0$ war das Integral entlang γ_1 nicht definiert. Hier für γ_2 ist es wohldefiniert und die "obige Formel" gilt für alle $n \neq -1$. Für $n = -1$ erhalten wir ein anderes, wohldefiniertes Ergebnis:

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-\pi}^0 (e^{it})^{-1} \cdot i e^{it} \cdot dt = i \int_{-\pi}^0 dt = i\pi. \quad (1.38)$$

(iii) Wir parametrisieren die obere Halbkreislinie im Uhrzeigersinn

$$\gamma_3 : \quad [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \dot{\gamma}_3(t) = -i e^{i(\pi-t)}, \quad (1.39a)$$

$$t \mapsto e^{i(\pi-t)}$$

mit Anfangspunkt $\gamma_3(0) = e^{i\pi} = -1$ und Endpunkt $\gamma_3(\pi) = e^0 = 1$. Wir integrieren

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^\pi (e^{i(\pi-t)})^n \cdot (-i e^{i(\pi-t)}) \cdot dt = -i \int_0^\pi e^{(n+1)i(\pi-t)} dt \quad \underbrace{=}_{n \neq -1} \frac{1}{n+1} e^{(n+1)i(\pi-t)} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}. \quad (1.40a)$$

Das Ergebnis für $n \neq -1$ ist identisch zu dem unter (ii). Für $n = -1$ erhalten wir ein völlig anderes Ergebnis als unter (ii)

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^\pi (e^{i(\pi-t)})^{-1} \cdot (-i e^{i(\pi-t)}) \cdot dt = -i \int_0^\pi dt = -i\pi. \quad (1.41)$$

Bemerkung: (a) Für $n \neq -1$ hängt der Wert des Integrals nicht vom Wegverlauf ab (von der offensichtlichen Nichtdefiniertheit im Falle $n < 0$ und γ_1 einmal abgesehen).

(b) Für $n = -1$ ist die Differenz der Integrale

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz = +2\pi i, \quad (1.42)$$

wobei die linke Seite identisch ist zu $\int_{\gamma} f(z)dz$ mit einem geschlossenen Weg γ im Gegenuhrzeigersinn um den Einheitskreis (von -1 zu -1). Man überlegt sich, daß dieser Wert derselbe ist für einen beliebigen Radius der Kreislinie.

Beispiel(e) 1.5. $f(z) = |z|$ stetig, nicht komplex differenzierbar.

Wege wie oben.

$$(i) \quad \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-1}^1 |t| \cdot 1 \cdot dt = 2 \int_0^1 t dt = t^2 \Big|_0^1 = 1 \quad (1.43a)$$

$$(ii) \quad \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^0 1 \cdot i e^{it} \cdot dt = e^{it} \Big|_{-\pi}^0 = 1 - (-1) = 2 \quad (1.43b)$$

$$(iii) \quad \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_0^{\pi} 1 \cdot (-i e^{i(\pi-t)}) \cdot dt = e^{i(\pi-t)} \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2 \quad (1.43c)$$

Bemerkung: Hier hängt der Wert des Integrals offenbar vom Wegverlauf ab, wobei γ_2 und γ_3 dasselbe Ergebnis liefern. (Sobald für γ_2 das Ergebnis als reell erkannt ist, muß offenbar für γ_3 das Ergebnis identisch sein. Wieso?)

Potentialfunktionen

Wir untersuchen nun die Frage, ob es “Stammfunktionen” oder “Potentiale” gibt.

$$\int_{\gamma} \underbrace{f(z)}_{=g+ih} dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{=v_1+iv_2} dt \quad (1.44a)$$

$$= \int_a^b [(gv_1 - hv_2) + i(hv_1 + gv_2)] dt \quad (1.44b)$$

$$= \int_a^b \left[\begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] dt. \quad (1.44c)$$

Wir sehen, daß Real- und Imaginärteil des Integrals durch übliche Wegintegrale von Kraftfeldern

$$\begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}, \quad \left(\text{Geschwindigkeitsvektor } \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) \quad (1.45)$$

in \mathbb{R}^2 gegeben sind. Unabhängigkeit der Integrale vom konkreten Verlauf des Weges führt auf den Begriff des konservativen Kraftfeldes. Ein notwendiges und für einfach zusammenhängende Gebiete hinreichendes Kriterium ist die Rotationsfreiheit:

$$\nabla \times \begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = 0, \quad (1.46)$$

wobei hier in zwei Raumdimensionen nur ein Paar von disjunkten Koordinaten existiert. Die Rotationsfelder besitzen nur eine Komponente, so daß (1.46) lautet

$$-\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (1.47)$$

Dies sind gerade die Cauchy-Riemann DGL (1.21).

Theorem 1.4. Sei f eine komplexe Funktion auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet und reell differenzierbar. Integrale über f hängen nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber vom konkreten Verlauf des Weges, genau dann, wenn f holomorph ist.

Seien nun G und H Potentiale zu $\begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} G \\ \frac{\partial}{\partial y} G \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} H \\ \frac{\partial}{\partial y} H \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} G = \frac{\partial}{\partial y} H, \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} G = -\frac{\partial}{\partial x} H, \quad (1.49)$$

also erfüllt $F := G + iH$ die Cauchy-Riemann DGL und ist daher holomorph. Es gilt

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}, \quad \text{und} \quad F'(z) = \frac{\partial}{\partial x} G + i \frac{\partial}{\partial x} H = g + ih = f(z). \quad (1.50)$$

Damit haben wir zu $f(z)$ auch eine Stammfunktion gefunden, wobei wie im Reellen definiert ist:

Definition 1.9. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann heißt $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f , wenn F holomorph ist und $F' = f$.

Definition 1.10. (Integrierbarkeit)

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heiße integrierbar, wenn ihre Wegintegrale nur von den Endpunkten eines Weges, nicht aber vom konkreten Verlauf abhängen.

Bemerkung: Wir hatten oben bewiesen, daß stetige, reell differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann integrierbar sind, wenn sie holomorph sind. Wir wollen die Voraussetzung ‘reelle Differenzierbarkeit’ fallen lassen und die Aussage erweitern zu ‘Stetige Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind genau dann integrierbar, wenn sie holomorph sind.’ Hierzu ist noch zu zeigen ‘eine integrierbare stetige Funktion ist komplex differenzierbar’. Oder auch: ‘eine stetige Funktion mit Stammfunktion ist komplex differenzierbar’. Dies klingt sonderbar, wird von uns aber zugig gezeigt. Zunächst überlegen wir

Lemma 1.5. Eine integrierbare stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Beweis. Wir definieren zu der integrierbaren stetigen Funktion f eine Funktion F durch willkürliche Auszeichnung eines Referenzpunktes z_0 sowie

$$F(z) := \int_{\gamma} f(\tilde{z}) d\tilde{z}, \quad \gamma = \text{beliebiger Weg von } z_0 \text{ zu } z, \quad (1.51)$$

wobei das Ergebnis nicht vom konkreten Wegverlauf abhängt.

Seien nun z_1 und z_2 zwei (benachbarte) Punkte im Definitionsbereich von f , so kann die Differenz der Funktionswerte $F(z_2) - F(z_1)$ als Integral über f mit "direktem, geradem Weg" γ von z_1 nach z_2 geschrieben werden (dies folgt aus der Möglichkeit für den $F(z_2)$ zu Grunde liegenden Weg γ_2 den Weg γ_1 von z_0 nach z_1 und dann das gerade Wegstück γ von z_1 nach z_2 anzuschließen).

Damit

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = f(z_1) \cdot (z_2 - z_1) + o(z_2 - z_1) \quad (1.52)$$

wobei die letzte Aussage aus der Stetigkeit von f folgt und $o(z_2 - z_1)$ den schneller als linear verschwindenden Restterm bezeichnet. Also ist F linear approximierbar in z_1 , d.h. komplex differenzierbar in z_1 mit Ableitung $F'(z_1) = f(z_1)$ (und z_1 war beliebig gewählt). \square

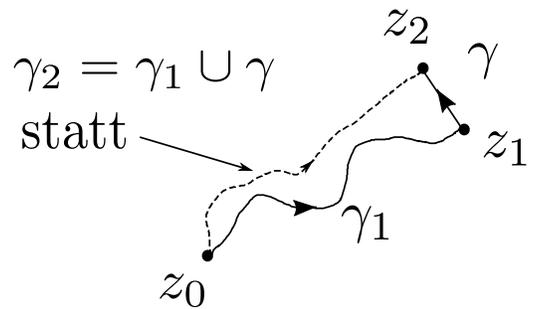
Wir leiten nun zwei Theoreme her, die von nicht zu unterschätzender Bedeutung sein werden, auch in Hinblick konkreter Rechnungen. Eine Schlußfolgerung der Integralsätze von Cauchy ist die Aussage, daß eine komplex differenzierbare Funktion beliebig häufig komplex differenzierbar ist. Dies bedeutet dann, daß die Stammfunktion F zu einer integrierbaren stetigen Funktion f nicht nur einmal, sondern (mindestens) zweimal komplex differenzierbar ist. Dies zieht nach sich, daß $f = F'$ überall komplex differenzierbar, d.h. holomorph ist.

Theorem 1.6. (Cauchy Integralsatz) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die mit evtl. Ausnahme eines (einzigen) Punktes holomorph ist. Dann ist das Wegintegral entlang eines jeden geschlossenen Weges null:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (1.53)$$

Vor dem Beweis sei bemerkt, daß die Aussage trivial ist für auf ganz G holomorphe Funktionen. Dies ist das Ergebnis unserer obigen Überlegungen. Aber nun gilt es, einen Ausnahmepunkt zu berücksichtigen, bei dem keine komplexe Differenzierbarkeit, aber nach Voraussetzung noch Stetigkeit vorliegt.

Beweis. Falls komplexe Differenzierbarkeit an einem Punkt z_0 "verloren gehen" sollte, so kann der betrachtete Weg γ um einen Weg $\tilde{\gamma}$ ergänzt werden, so daß γ und $\tilde{\gamma}$ hintereinander ausgeführt ein Gebiet umlaufen, das den problematischen Punkt nicht enthält.



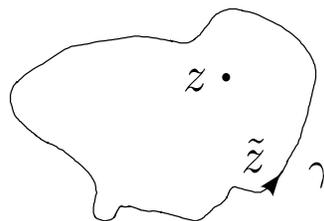
Der Weg $\tilde{\gamma}$ kann so gewählt werden, daß er eine "Schleife" darstellt mit identischen Hin- und Rückwegen nach z_0 mit einem infinitesimal engen Umlauf von z_0 . Das Integral entlang γ und daran angehängt $\tilde{\gamma}$ liefert 0, da der Integrand im umlaufenen Gebiet holomorph ist. Nun ziehen wir das Integral über $\tilde{\gamma}$ ab, dieses liefert jedoch wegen der Stetigkeit des Integranden und der Geometrie des Weges ebenfalls null

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = 0 - 0 = 0. \quad (1.54)$$

□

Theorem 1.7. (Cauchy Integralformel)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, z beliebig aus G und γ ein geschlossener Weg, der z genau einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft.



Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} \quad (1.55)$$

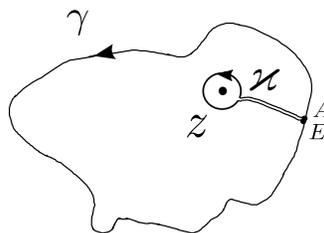
Beweis. Wir ergänzen bzw. spalten geschickt auf

$$\int_{\gamma} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} = \int_{\gamma} \underbrace{\frac{f(\tilde{z}) - f(z)}{\tilde{z} - z}}_{\text{Funktion von } \tilde{z} \text{ wie in Theorem 1.6}} d\tilde{z} + \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} \quad (1.56a)$$

$$= 0 + f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{\tilde{z} - z} d\tilde{z} \stackrel{(*)}{=} f(z) \cdot 2\pi i. \quad (1.56b)$$

Der Integrand des ersten Integrals in (1.56a) ist als Funktion von \tilde{z} überall holomorph, außer möglicherweise bei z , dort aber immerhin stetig bzw. stetig hebbbar, wenn der Funktionswert als Grenzwert $\tilde{z} \rightarrow z$ gewählt wird. Dieser Grenzwert existiert und ist $f'(z)$.

Warum gilt (*) in (1.56b)? Wir überlegen zunächst, daß γ und \varkappa (= Kreisweg um z plus infinitesimal benachbarte Zu- und Abläufe, wie in der Abbildung) das gleiche Integral liefern. Denn die Differenz der Integrale ist das Integral entlang γ gefolgt mit \varkappa in umgekehrter Richtung: \varkappa^{\vee} . Das von $\gamma \cup \varkappa^{\vee}$ umrundete Gebiet enthält z nicht bzw. die Umlaufzahl von $\gamma \cup \varkappa^{\vee}$ um z ist 0.



Zum Integral entlang des Weges γ trägt nur der Kreis mit Mittelpunkt z bei, die Beiträge von Zu- und Ablauf heben sich gegenseitig weg. Der Kreisweg um z liefert als Integral über $1/(\tilde{z} - z)$ bzgl. \tilde{z} gerade $2\pi i$ wie wir früher gesehen haben (der Radius der Kreislinie fällt heraus). \square

Bemerkung:

- Dieses Theorem ist von größter Wichtigkeit, da es besagt, daß der Funktionswert an einem beliebigen Punkt innerhalb des von γ umrundeten Gebietes schon durch die Funktionswerte auf dem Rand bestimmt sind.
- Aus der Integralformel folgt, daß $f(z)$ beliebig häufig nach z differenzierbar ist, da dies für den Integranden $1/(\tilde{z} - z)$ gilt. Das Ergebnis ist (jede Ableitung erhöht den Exponenten des Integranden um 1, liefert einen negativen Vorfaktor und noch einen Faktor (-1) , da im Nenner $\dots - z$ steht):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tilde{z})}{(\tilde{z} - z)^{n+1}} d\tilde{z} \tag{1.57}$$

- Insbesondere haben wir nun den Abschluß des Beweises zu der Aussage “Stetige komplexe Funktionen sind genau dann integrierbar, wenn sie komplex differenzierbar sind (und das beliebig häufig)”.

Beispiel(e) 1.6. Cauchy Integralformel

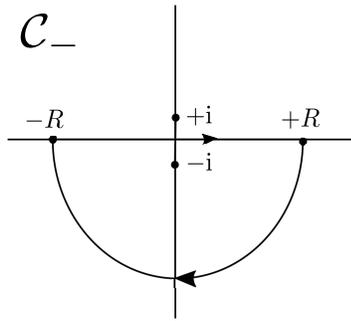
$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z + i)(z - i)^3} dz$$

rechnen wir auf zwei Weisen (eine reicht natürlich für die Auswertung).

Der Integrand hat zwei Polstellen: $+i$ in der oberen Halbebene, $-i$ in der unteren Halbebene. Bei ∞ fällt der Integrand wie $\mathcal{O}(1/z^4)$ ab. Daher können wir ohne das Ergebnis zu ändern den Integrationsweg durch einen “großen” Halbkreisbogen in der oberen oder auch in der unteren Halbebene ergänzen. Der Gewinn ist, daß der neue Integrationsweg geschlossen ist und das Integral durch die Integralformel nach Cauchy bestimmt werden kann.

In kleinen Schritten: Wir approximieren das Integral von $-\infty$ nach $+\infty$ durch eines über das Intervall $[-R, +R]$ (mit einem Fehler $\mathcal{O}(1/R^3)$). Dann hängen wir einen Halbkreisbogen mit Radius R an (Fehler $\mathcal{O}(R \cdot 1/R^4)$). Das Gesamtintegral wird ausgewertet und liefert für $R \rightarrow \infty$ den Wert des obigen Integrals. (Bemerkung: Der Limes $R \rightarrow \infty$ wird langweilig sein, da das geschlossenen Konturintegral unabhängig von R ist, solange die Kontur die Polstelle(n) in der oberen bzw. unteren Halbebene umrundet.)

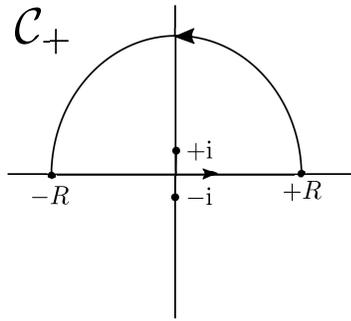
Das Integral über den geschlossenen Weg kann nach der Integralformel berechnet werden



$$\int_{C_-} \frac{1}{(z+i)} \underbrace{\frac{1}{(z-i)^3}}_{=:f(z)} dz \stackrel{(!)}{=} -2\pi i \cdot f(-i) = -\frac{2\pi i}{(-2i)^3} = -\frac{\pi}{4}, \quad (1.58)$$

wobei (!) bei der Anwendung der Integralformel der Umlauf des Integrationsweges in mathematisch negativem Sinn berücksichtigt werden muß. Beachte: die Funktion f ist innerhalb des Halbkreisbogens bzw. in ganz \mathbb{C}^- holomorph.

Wir können den Integrationsweg auch in der oberen Halbebene schließen, definieren die Funktion f aber anders (und so, daß sie innerhalb des Halbkreisbogens bzw. in ganz \mathbb{C}^+ holomorph ist)



$$\begin{aligned} \int_{C_+} \frac{1}{(z+i)} \underbrace{\frac{1}{(z-i)^3}}_{=:f(z)} dz &= +\frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(i) = 2\pi i(+1) \frac{1}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (1.59a)$$

Bemerkung: Ähnliche Rechnungen können wir durchführen, solange der Integrand eine Asymptotik $\mathcal{O}(1/z^n)$ mit $n > 1$ hat, so wie im Beispiel 2), aber nicht wie bei 3).

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz = \int_{C_+} \frac{1}{(z-i)^2} \underbrace{\frac{1}{(z+i)^2}}_{=:f(z)} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \underbrace{f'(i)}_{=-\frac{2}{(z+i)^3} \Big|_{z=i}} = \frac{\pi}{2}$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2z}{z^2+1} dz = ?$$

Vorsicht: Das Schließen funktioniert nicht, da die oben besprochenen Fehler hier von der Ordnung $\mathcal{O}(R \cdot 1/R^1)$ sind und daher nicht gegen 0 gehen (müssen), wenn $R \rightarrow \infty$.

Das Integral ist tatsächlich nicht wohldefiniert: $\int_{-R_1}^{R_2} \dots$ mit verschiedenen $R_1, R_2 (\rightarrow \infty)$ macht Ärger.

Es gibt überraschende Folgerungen:

Theorem 1.8. (Mittelwertgleichung)

Mit obigen Bezeichnungen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma=K_r(z)} d\tilde{z} \frac{f(\tilde{z})}{\tilde{z} - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt f(z + re^{it}), \quad (1.60)$$

wobei γ ein Kreisweg $K_r(z)$ (mit mathematisch positivem Umlaufsinn) um z mit (beliebigem) Radius r ist. Insbesondere gilt

$$|f(z)| \leq \max_{\tilde{z} \in K_r(z)} |f(\tilde{z})|. \quad (1.61)$$

Beweis. Man benutze

$$\tilde{z} = \gamma(t) = z + re^{it}, \quad d\tilde{z} = ire^{it} dt, \quad \tilde{z} - z = re^{it}. \quad (1.62)$$

□

Theorem 1.9. (Satz von Liouville)

Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe und beschränkte Funktion muß konstant sein.

Beweis. Wir berechnen die Differenz $f(z) - f(0)$ mittels Cauchy Integralformel über einen Kreisweg um z , mit Radius R , den wir im letzten Schritt gegen ∞ schicken

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z)} d\tilde{z} f(\tilde{z}) \left(\frac{1}{\tilde{z} - z} - \frac{1}{\tilde{z} - 0} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_R(z)} d\tilde{z} f(\tilde{z}) \frac{z}{(\tilde{z} - z)\tilde{z}}, \quad (1.63)$$

wobei der Integrand beschränkt ist: der Faktor $f(\tilde{z})$ ist nach Voraussetzung durch eine globale Konstante beschränkt und der zweite Faktor des Integranden als Funktion von \tilde{z} ist von der Ordnung $\mathcal{O}(1/R^2)$. Der Integrationsweg hat einen Umfang $2\pi R$, so daß das Integral von der Ordnung $\mathcal{O}(R \cdot 1/R^2) = \mathcal{O}(1/R)$ ist, also mit $R \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit ist die linke Seite gleich 0. □

Theorem 1.10. (Fundamentalsatz der Algebra)

Sei $p(z)$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 , dann hat $p(z)$ mindestens eine Nullstelle. (Daraus folgt, daß die Zahl aller Nullstellen – bei Berücksichtigung möglicher Vielfachheiten – gleich dem Grad des Polynoms ist.)

Beweis. Annahme, daß $p(z)$ keine Nullstelle habe. Dann ist $1/p(z)$ auf ganz \mathbb{C} holomorph. Außerdem ist $1/p(z)$ beschränkt: $1/p(z) \propto 1/z^{\text{Grad}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$.

Nach dem Satz von Liouville müßte nun $1/p(z)$ konstant sein, was im Widerspruch zu Grad ≥ 1 steht. □

Wir hatten in unseren Ableitungen einen anschaulichen Begriff des Umlaufs eines geschlossenen Weges um einen (inneren) Punkt benutzt. In einer ordentlichen mathematischen Abhandlung definiert man

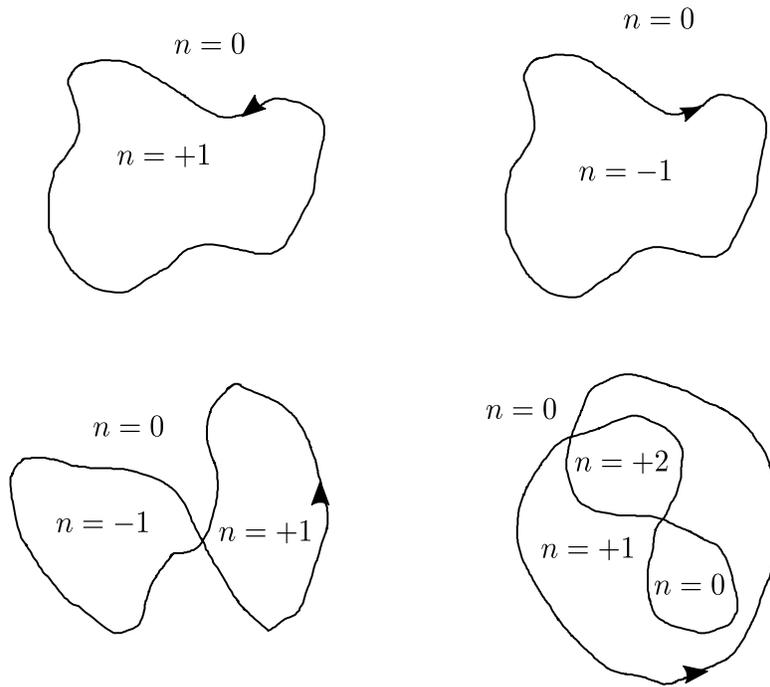
Definition 1.11. (Umlaufzahl)

Sei γ ein geschlossener Weg. Für einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$n_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z} - z}, \quad (1.64)$$

die Umlaufzahl (Windungszahl) von γ um z . Es gilt $z \in \mathbb{Z}$.

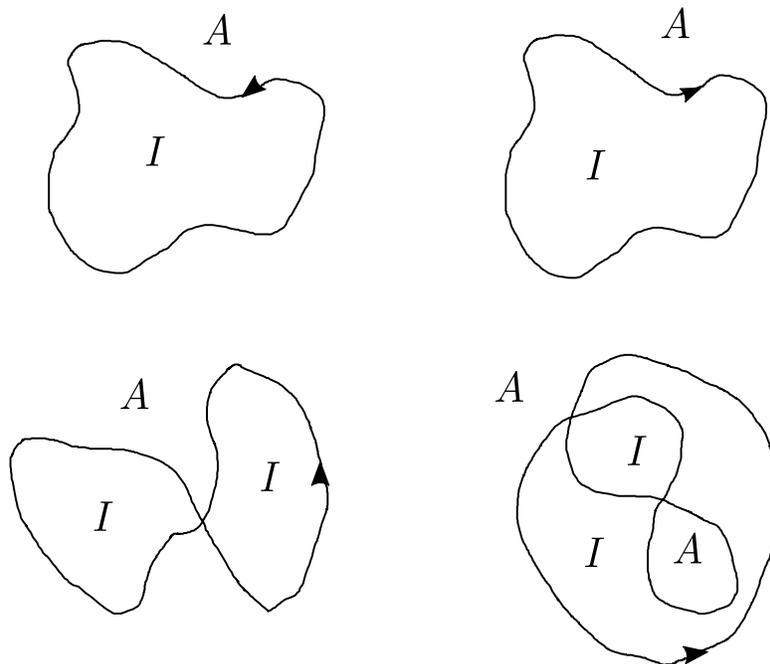
Bemerkung: $n_\gamma = \pm 1$ bedeutet einmaligen Umlauf im mathematisch positiven/negativen Sinn.
 Beispiele:



Definition 1.12. (*Inneres / Äußeres eines Weges*)

Das Innere eines Weges γ ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid n_\gamma(z) \neq 0\}$. Das Äußere des Weges γ ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid n_\gamma(z) = 0\}$.

Beispiele:



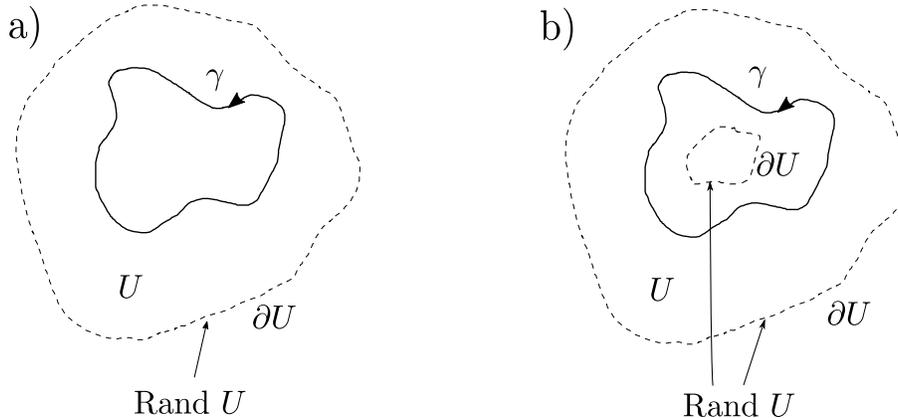
Definition 1.13. (Nullhomologe Wege)

Ein Weg $\gamma \subset U$ heißt nullhomolog in U , wenn für jedes z aus dem Komplement $\mathbb{C} \setminus U$ gilt

$$n_\gamma(z) = 0. \tag{1.65}$$

Ein Gebiet U , in dem jeder Weg nullhomolog ist, heißt einfach-zusammenhängend.

(a) ist einfach-zusammenhängend, b) nicht).



1.4 Spezielle Funktionen

Definition 1.14. (Logarithmus)

Wir definieren wie in der reellen Analysis $\log z$ als Stammfunktion zu $1/z$:

$$\log z := \int_1^z \frac{ds}{s}. \tag{1.66}$$

Vorsicht:

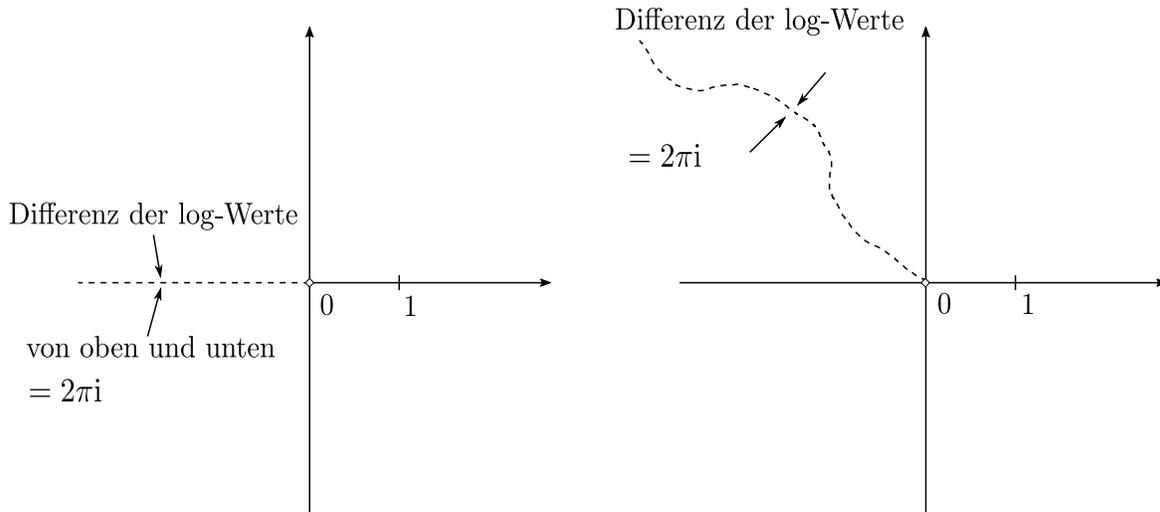
- $1/z$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert.
- Der Definitionsbereich von \log kann 0 nicht enthalten, außerdem soll für beliebige Wege γ_1 und γ_2 von 1 nach z gelten

$$\int_{\gamma_1} \frac{ds}{s} = \int_{\gamma_2} \frac{ds}{s} \Leftrightarrow \int_\gamma \frac{ds}{s} = 0, \tag{1.67}$$

wobei der Weg $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^\vee$ ein geschlossener Weg von 1 nach 1 ist (an γ_1 angehängt der Weg γ_2 in umgekehrter Richtung).

- Integrale entlang geschlossener Wege, die nicht-verschwindende Windungszahl um 0 haben, liefern additive Vielfache von $2\pi i$. Dies ist zu verhindern.
- Damit beliebige geschlossene Wege den Punkt 0 nicht umlaufen, muß der Definitionsbereich des \log einfach-zusammenhängend sein, was durch Aussparen einer geeigneten Punktmenge erzielt wird.

Man wohl-definiert $\log z$ auf geschlitzten Ebenen, wobei eine Linie (sog. Verzweigungsschnitt, s.u.) von 0 bis ∞ aus dem grundsätzlichen Definitionsbereich \mathbb{C} herausgenommen wird. So wird der Definitionsbereich einfach zusammenhängend. Der Schnitt entlang der negativen reellen Halbachse ist Standard, aber bei weitem nicht die einzige Möglichkeit $\log z$ wohl-definiert zu machen.



Der Definitionsbereich des \log ist $\mathbb{C} \setminus$ Linie von 0 (einschließlich) nach ∞ .

Es gilt aber immer

$$\log z = \ln |z| + i \cdot \text{geeignete Phase}, \quad (1.68)$$

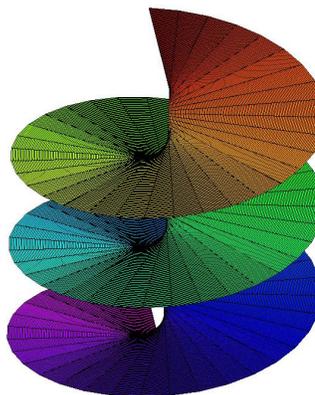
wobei diese Beziehung durch Wahl des Integrationsweges von 1 nach $|z|$ und dann auf einem Kreis des Radius $|z|$ zum Punkt z hergeleitet wird.

Das Auftauchen der Phase ist der Grund für die “Mehrdeutigkeit” des Logarithmus. Es gilt aber immer $\log 1 = 0$ und, sofern der Schnitt die positive reelle Halbachse ausläßt, auch $\log x = \ln x$ für reelle $x > 0$.

Bemerkung: • Wenn über den Verzweigungsschnitt fortgesetzt wird, erhält der Wert des Logarithmus ein zusätzliches $\pm 2\pi i$. Wenn dies n -mal geschieht, sagt man auch, man arbeite mit dem n -ten Zweig des Logarithmus ($n \in \mathbb{Z}$). Der 0-te Zweig heißt auch der Hauptzweig.

• In numerischen Rechnungen ist häufig “der Logarithmus” mit Standard-Verzweigungsschnitt definiert, wobei die negative reelle Halbachse zum Definitionsbereich gehört und Stetigkeit aus der oberen Halbebene zu Grunde gelegt wird, d.h. $\log x = \log |x| + \pi i$.

Man kommt ohne Verzweigungsschnitt aus, wenn man Überlagerungsmannigfaltigkeiten bzw. Riemannsche Flächen einführt. Im vorliegenden Fall sind dies unendlich viele geschlitzte Ebenen, die geeignet aneinander geklebt sind.



Plot rechts erstellt mit Maple:

```
with(plots):
plot3d([r*cos(phi), r*sin(phi), phi], r=0..1, phi=-3*Pi..3*Pi, grid=[100,100]);
```

Definition 1.15. (*Exponentialfunktion*)

Üblicherweise betrachtet man in der Funktionentheorie sehr früh Reihen und findet, daß konvergente Potenzreihen $\sum a_n z^n$ innerhalb ihres Konvergenzradius holomorphe Funktionen definieren. Die Exponentialfunktion ist somit als

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.69)$$

auf ganz \mathbb{C} definiert und dort holomorph.

Wir können auch definieren

exp ist die Umkehrfunktion zu log.

Die einzige sich so stellende Frage ist, wo exp definiert ist? Mit dem Hauptzweig des log (mit $] - \infty, 0]$ als Verzweigungsschnitt) hat man exp auf $\mathbb{R} \times] - \pi, \pi[$ definiert. Unter Benutzung der anderen Zweige – was dem Zugrundelegen einer $2\pi i$ -Periodizität von exp entspricht – gelingt die Definition von exp auf ganz $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Rechenregeln: wie “bekannt aus reeller Analysis”.

Ableitungen :

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}, \quad (1.70a)$$

$$\frac{d}{dz} \exp z = \frac{1}{\frac{d}{dw} \log w} \Big|_{w=\exp z} = w \Big|_{w=\exp z} = \exp z, \quad (1.70b)$$

Additionstheoreme :

$$\text{alles für exp wie bekannt,} \quad (1.70c)$$

Warnung : für log gilt nicht immer $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$,
je nach Fall $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 + k \cdot 2\pi i$, $(k \in \mathbb{Z})$. $(1.70d)$

1.5 Anwendungen (harmonische Funktionen, Cauchy)

Wir konstruieren gesuchte harmonische Funktionen als “Teile” geeigneter holomorpher Funktionen.

1.5.1 Elektrostatik

Wir betrachten Systeme mit Zylindersymmetrie, d.h. ohne explizite Abhängigkeit von x_3 , z.B.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1(x_1, x_2) \\ E_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \hat{=} E_1 + i E_2 =: E, \quad (1.71)$$

wobei $\hat{=}$ nur eine geeignete komplexe Notation bezeichnet, die zunächst einmal nichts weiter impliziert. Wir benutzen statt x_1, x_2 wieder die Symbole x, y , wobei z die Kombination $z = x + iy$ ist, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \hat{=} x + iy =: z. \quad (1.72)$$

Sei nun $u(x, y)$ das Potential zu \vec{E} , dann

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}u \hat{=} - \left(\frac{\partial}{\partial x}u + i \frac{\partial}{\partial y}u \right). \quad (1.73)$$

Zur Erinnerung: In der Statik ist \vec{E} konservativ, da aus der Maxwell-Gleichung mit Zeitableitung von \vec{B} ($\rightarrow 0$) folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}}_{=0} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (1.74)$$

Im Raum mit Ladungsverteilung $\rho = 0$ gilt

$$0 = 4\pi\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u \right). \quad (1.75)$$

Damit erfüllt u die Laplace-Gleichung (im Zweidimensionalen). Damit ist aber

$$\vec{F} := \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y}u \\ \frac{\partial}{\partial x}u \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

ein konservatives Vektorfeld, da die Rotation in 2-Dimensionen liefert

$$\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \stackrel{(1.75)}{=} 0. \quad (1.77)$$

Wir können daher \vec{F} als Gradient einer skalaren Funktion v schreiben, so daß

$$\vec{F} = \vec{\nabla}v \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial y}u = \frac{\partial}{\partial x}v, \quad \frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial}{\partial y}v \quad (1.78)$$

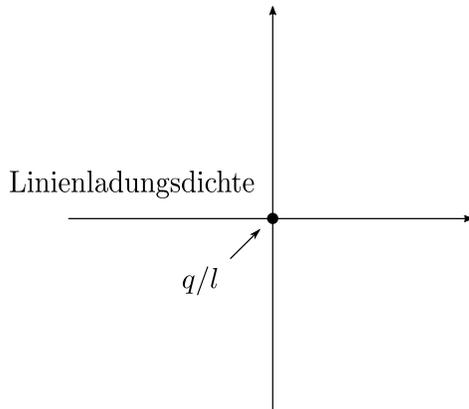
Dies sind die Cauchy-Riemann DGL für die Funktion $f(z) = u + i v$, die damit als holomorph erkannt ist.

Wir können daher im ladungsfreien Raum unter Benutzung von (1.73,1.78) schreiben

$$\vec{E} \hat{=} - \left(\frac{\partial}{\partial x} u - i \frac{\partial}{\partial x} v \right) = -\overline{f'(z)}, \quad \text{mit } f(z) := u + i v \text{ holomorph.} \quad (1.79)$$

Umgekehrt können wir irgendwelche Funktionen, die komplex differenzierbar sind, benutzen um Lösungen zu elektrostatischen Problemen zu finden. Beispiel: Randwertaufgaben, konkret: Äquipotentialflächen und Linien-/ Flächenladungen.

Beispiel(e) 1.7. ∞ -langer gerader Draht mit homogener Ladungsdichte q/l durchstoße Ursprung von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.



Die Funktion

$$f(z) := -2 \frac{q}{l} \log z \quad (1.80)$$

ist außerhalb des Ursprungs holomorph. Der Sprung des Imaginärteils am Verzweigungsschnitt "interessiert hier nicht" bzw. kann je nach Bedarf umgelegt werden.

Frage: Warum liegt mit der Singularität bei 0 eine Punktladung in 2d bzw. eine Linienladung in 3d vor?

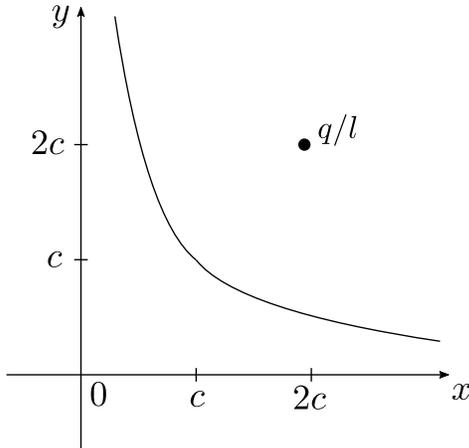
Welche Rolle spielt der Imaginärteil?

Mit den Überlegungen auf den nächsten Seiten ist die Ladungsdichte im Ursprung:

$$\frac{q}{l} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \text{Sprung von } \text{Im} f(z) \text{ bei Umlauf um Ursprung} \quad (1.81a)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(-2 \frac{q}{l} \right) \cdot 2\pi = \frac{q}{l}. \quad (1.81b)$$

Beispiel(e) 1.8. ∞ -langer gerader Draht mit homogener Ladungsdichte q/l vor leitender Fläche mit hyperbelartigem Querschnitt.



Zu den Behauptungen:

Die Figur zeigt die Fläche $xy = c^2$ in Projektion entlang der 3. Achse.

Die Funktion

$$f(z) := -2\frac{q}{l} \log \frac{z^2 - i8c^2}{z^2 + i4c^2}. \quad (1.82)$$

ist holomorph außer bei $\pm 2c(1 + i)$ sowie $\pm\sqrt{2}c(1 - i)$ und Verzweigungsschnitten. Nur $2c(1 + i)$ liegt auf der "richtigen Seite" der Fläche. Der Realteil von $f(z)$ ist konstant auf $xy = c^2$.

$$f(z) = -2\frac{q}{l} \log \underbrace{\frac{x^2 - y^2 + i(2xy - 8c^2)}{x^2 - y^2 + i(2xy + 4c^2)}}_{\substack{= \\ xy=c^2} \frac{x^2 - y^2 - i6c^2}{x^2 - y^2 + i6c^2}} \quad \text{Quotient hat Betrag 1} \quad (1.83a)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} f(z) = 0 \quad \text{konstant auf } xy = c^2 \quad (1.83b)$$

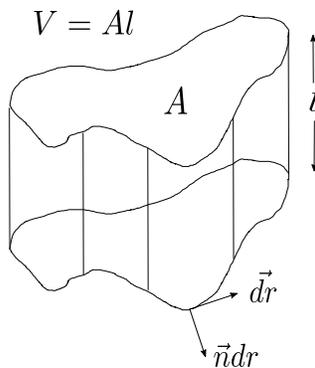
Singularitäten von $f(z)$ liegen bei Nullstellen des Zählers und des Nenners der rationalen Funktion im Argument des Logarithmus vor. Beachte $\sqrt{i} = \pm(1 + i)/\sqrt{2}$:

$$z^2 = i8c^2 \Rightarrow z = \pm 2c(1 + i), \quad (1.84a)$$

$$z^2 = -i4c^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}c(1 - i). \quad (1.84b)$$

Es stellen sich nun Fragen wie oben: Warum liegt bei der Singularität $2c(1 + i)$ eine Punktladung in 2d (bzw. eine Linienladung in 3d) vor? Welche Rolle spielt der Imaginärteil der Funktion?

Wir beantworten die Frage nach dem Imaginärteil der holomorphen Funktion.



Dazu betrachten wir das Flächenintegral von \vec{E} im 3d-Raum über ein zylindrisches Volumen V mit Querschnitt A und Höhe l . Das Flächenintegral von \vec{E} ist gleich $4\pi \cdot$ Gesamtladung ($= Q$) in V und hat nur Beiträge durch die Seitenfläche

$$4\pi Q = l \cdot \int_{\text{Umrandung von } A} \vec{E} \cdot \vec{n} dr, \quad (1.85)$$

wobei \vec{n} der Normalenvektor auf den Rand ist.

Wenn $\vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ in Richtung positiven Umlaufs des Weges zeigt, dann zeigt \vec{n} in die um 90°

im Uhrzeigersinn gedrehte Richtung, d.h. $\vec{n}dr = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$, so daß

$$\vec{E} \cdot \vec{n}dr = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}u \\ -\frac{\partial}{\partial y}u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)dy + \left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)dx \quad (1.86a)$$

$$= -\text{Im} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}u - i \frac{\partial}{\partial y}u \right) (dx + idy) \right] = -\text{Im} [f'(z)dz] . \quad (1.86b)$$

Mit (1.85) geht es weiter

$$\frac{Q}{l} = -\frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[\int_{\text{Umrandung von } A} f'(z)dz \right] = -\frac{1}{4\pi} \text{Im} \left[f(z) \Big|_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} \right] \quad (1.87a)$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{l} = -\frac{1}{4\pi} v(z) \Big|_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} . \quad (1.87b)$$

Damit ist $v(z)$ als ‘‘Ladungsfunktion’’ etabliert. Beachte: ‘‘Anfang’’ und ‘‘Ende’’ des umlaufenen Weges sind im Gegenuhrzeigersinn zu verstehen. Bei geschlossenen Wegen um Singularitäten (mit Verzweigungsschnitt) ist (1.87b) i.A. ungleich 0. Die konkrete Lage des Verzweigungsschnitts betrifft nur $v(z)$, ‘‘Anfang’’ und ‘‘Ende’’ sind davor und danach zu legen.

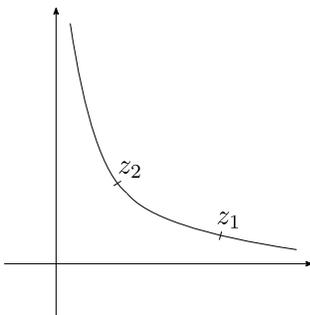
Beispiel(e) 1.9. (s.o.)

Der $\log z$ zeigt eine Differenz von $+2\pi i$, wenn ein geschlossener Weg um 0 (mit positivem Umlaufsinn) vorliegt.

Der Punkt $+2c(1+i)$ ist eine einfache Nullstelle des Arguments der \log -Funktion, also

$$f(z) \Big|_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} = -2\frac{q}{l} \cdot (+2\pi i) \quad \Rightarrow \quad Q = q \quad \text{wie gewünscht.} \quad (1.88)$$

Bemerkung:

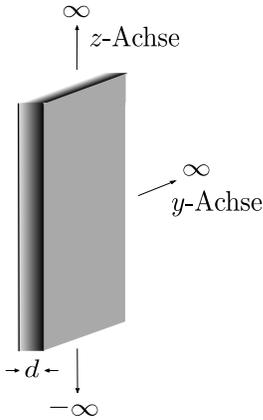


Wenn wir wissen wollen, welche Ladung auf der Randfläche zwischen zwei Punkten induziert wurde, können wir den gleichen Ausdruck verwenden. Ladungsmenge zwischen z_1 und z_2

$$Q(z_1, z_2) = -\frac{l}{2} \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} f(z) \Big|_{z_1}^{z_2} \right] . \quad (1.89)$$

Achtung: Das Vorzeichen hängt davon ab, welche Seite als umschlossene Seite aufgefaßt wird.

Beispiel(e) 1.10. *Randfeld eines unendlich \times halbumendlichen Plattenkondensators*



Lehrbuchmäßig werden große Plattenkondensatoren unter Ignorieren der Randfelder wie folgt berechnet:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.90a)$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \int_{\text{Einzelplatte}} \vec{E} \cdot d\vec{F} = 4\pi Q \quad (1.90b)$$

$$\vec{E} \text{ nur innen } \neq 0 \Rightarrow \int \vec{E} d\vec{F} = \pm E A \Rightarrow Q = \pm \frac{EA}{4\pi} \quad (1.90c)$$

Potentialdifferenz U und Kapazität C

$$U = - \int_{\text{links}}^{\text{rechts}} \vec{E} d\vec{r} = -E d \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{4\pi} \frac{A}{d}. \quad (1.91a)$$

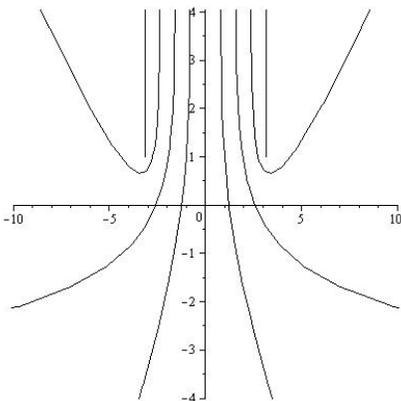
Wir behandeln nun einen halbumendlichen Plattenkondensator mit Breite $d = 2\pi$ (macht "Formeln einfacher", Umskalieren immer möglich). Die Platten dehnen sich unendlich entlang der z -Achse aus, haben Koordinaten $x = \pm\pi$ und $y \in [1, \infty[$.

Betrachte die implizit definierte holomorphe Funktion $f(z)$, die

$$iz = if(z) + e^{if(z)}, \quad (1.92)$$

erfüllt. Diese Funktion hat einen Realteil mit Werten, die zwischen $-\pi$ und π variieren. Betrachte dazu die Asymptotik $z \rightarrow \infty$

$$iz \simeq e^{if(z)} \Rightarrow f(z) \simeq -i \log(iz) \Rightarrow \text{Re}f(z) \in [-\pi, \pi] \quad (1.93a)$$



Die Potentialwerte $\pm\pi$ werden auf den Platten mit $x = \pm\pi, y \geq 1$ angenommen. Für $x = \pm\pi$ und $u = \pm\pi$ wird die implizite Gleichung für f zu

$$ix - y = iu - v + e^{iu-v} \Rightarrow y = v + e^{-v}, \quad (1.94)$$

was für jedes $y \geq 1$ genau zwei Lösungen für v hat (Ausnahme $y = 1$ korrespondiert zu $v = 0$.) Dies folgt aus: $v + e^{-v}$ geht gegen $+\infty$ für $v \rightarrow \pm\infty$, das globale Minimum liegt bei $v = 0$.

Der Plot zeigt in der $x - y$ -Ebene die Äquipotential-Linien zu 9 Werten zwischen $-\pi$ und π (die y -Achse ist die Äquipotentiallinie zu Potential 0).

Erzeugt mit Maple

```
for i from -4 to 4 do p[i]:=plot(subs(u=(1/4)*i*Pi,[u+sin(u)*exp(-v),
v-cos(u)*exp(-v),v=-10..10]),color=black) end do
display(p[-4],p[-3],p[-2],p[-1],p[0],p[1],p[2],p[3],p[4],view=[-10..10,-4..4])
```

1.5.2 Dirichlet-Randwertproblem für eine Scheibe

Wir betrachten ein Objekt mit Zylindersymmetrie und Querschnitt Kreisscheibe, Radius R , also ein ‘‘Rohr’’. Der Innenraum sei ladungsfrei mit einem nichttrivialen (aber zylindersymmetrischen) Potential auf der Randfläche. Wir wollen aus dem vorgegebenen Potential am Rand das Potential $u(z)$ innerhalb des Rohres berechnen, so daß es innen harmonisch ist, $\Delta u = 0$ für $|z| < R$, und am Rand noch stetig. Sei $v(z)$ der dazugehörige Imaginärteil, so daß $f(z) = u(z) + iv(z)$ innen holomorph und am Rand stetig ist. Wir werden die Cauchy-Integralformel anwenden und zwar auf $g(z)$ mit folgender Definition, wobei z_0 beliebig aus \mathbb{C} mit $|z_0| < R$ ist:

$$g(z) := \frac{f(z)}{R^2 - z\bar{z}_0}, \quad \text{holomorph auf der ganzen Kreisscheibe,} \quad (1.95a)$$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreisrand}} \frac{g(s)}{s - z} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(s) R^2}{R^2 - \bar{s}z} d\theta, \quad (1.95b)$$

wobei zum Schluß die Parametrisierung $s = Re^{i\theta}$, $ds = iRe^{i\theta}d\theta$ benutzt wurde,

Wir nehmen nun die letzte Gleichung, setzen die Definition von $g(z)$ ein und spezialisieren z_0

$$\frac{f(z)}{R^2 - z\bar{z}_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(s) R^2}{(R^2 - s\bar{z}_0)(R^2 - \bar{s}z)} d\theta, \quad (1.96a)$$

$$z_0 = z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(s) R^2}{|R^2 - s\bar{z}|^2} d\theta, \quad (1.96b)$$

Da

$$R^2 - s\bar{z} = s(\bar{s} - \bar{z}) \quad \Rightarrow \quad |R^2 - s\bar{z}| = R|s - z|, \quad (1.97)$$

erhalten wir

$$\frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{|s - z|^2} d\theta, \quad (1.98a)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi} (R^2 - |z|^2) \int_0^{2\pi} \frac{f(s)}{|s - z|^2} d\theta \quad (1.98b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{R^2 - |z|^2}{|s - z|^2} d\theta, \quad (1.98c)$$

Dieser Formel sieht man die Holomorphie in z nicht direkt an. Da im Integral nur reelle Faktoren zu $f(s)$ auftreten, können wir den Realteil von $f(z)$ nehmen, ohne Beiträge vom Imaginärteil von $f(s)$ ‘‘hineinzumischen’’

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) \frac{R^2 - |z|^2}{|s - z|^2} d\theta, \quad (1.99)$$

wobei im Integranden das Potential u nur auf dem Rand eingeht.

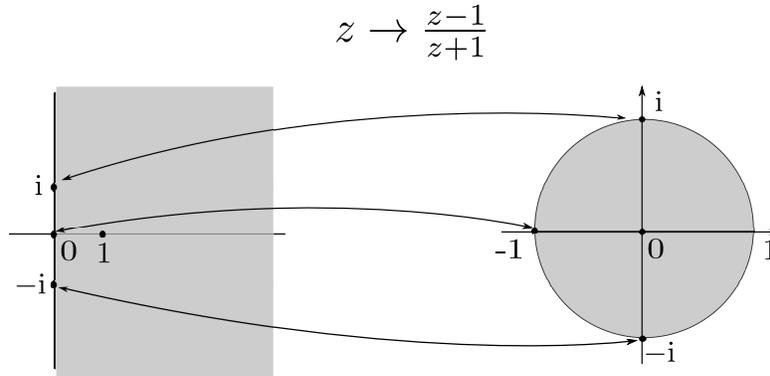
Umgekehrt liefert die Formel (1.99) für beliebige Randwerte mit stetigem $u(s)$ auf dem Rand eine in $|z| < R$ harmonische Funktion, die auf dem Rand stetig ist. Diese Aussage folgt aus folgenden Eigenschaften:

- Harmonizität: der Integrand als Funktion von z ist harmonisch, da dies $\frac{x}{x^2+y^2}$ und $\frac{y}{x^2+y^2}$ sind,
- Stetigkeit
 sei $u(s) \equiv 1$ (auf dem Rand), dann ist $u(z) = 1$,
 falls $u(s_0) = 0$ dann liefert das Integral für $z \rightarrow s_0$ den Wert 0.

Lösung für allgemeine einfach-zusammenhängende Gebiete

Dies gelingt rein theoretisch mit dem Riemannschem Abbildungstheorem: Jedes einfach-zusammenhängende Gebiet ist biholomorph auf die Kreisscheibe D abbildbar.

Beispiel: Halbebene auf $D(1)$



1.5.3 Kontinuumsmechanik

Wir beschreiben Fluide durch Dichten ρ und Geschwindigkeitsfelder \vec{v} . Ein beliebiges Teilchen mit Masse m auf einer Trajektorie $\vec{r}(t)$ hat eine Impulsänderung, die sich mittels Kettenregel aus der Zeit- und Ortsabhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes berechnet. Für beliebiges $\phi(\vec{r})$ gilt

$$\frac{d}{dt}\phi(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t}\phi + (\vec{\nabla}\phi)\dot{\vec{r}} = \frac{\partial}{\partial t}\phi + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\phi \quad (1.100a)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}, \quad (1.100b)$$

wobei in der zweiten Zeile die zeitliche Geschwindigkeitsänderung des Teilchens berechnet wurde durch Einsetzen von $\phi = \vec{v}$ also dem Geschwindigkeitsfeld des Fluids. Der Impuls in einem Volumenelement ΔV hat daher die zeitliche Ableitung $(\Delta V \rho) \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right)$, welche gleich der auf das Volumen ΔV wirkenden Kraft sein muß. Dies führt auf die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{f} \quad (1.101)$$

wobei wir hier nur Fälle mit Lamé-Viskositäts-Konstanten μ und λ gleich null betrachten. Die Gleichung ist dann als Euler-Gleichung bekannt

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} \quad (1.102)$$

Die Kraftdichte \vec{f} (z.B. Gravitation) mag auch in den Druckterm integriert werden. Wir formen nun den ∇ -Term auf der linken Seite um.

Mit “Phantasie” leitet man aus

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (1.103)$$

ab

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (1.104)$$

Damit folgt die folgende Form der Euler-Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right) = -\vec{\nabla} p - \frac{\rho}{2} \vec{\nabla} v^2. \quad (1.105)$$

Es gilt Erhaltung der Teilchenzahl bzw. der Masse, der eine Kontinuitätsgleichung zu Grunde liegt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \vec{v} = 0, \quad (1.106)$$

wobei letzte Beziehung für konstantes ρ , d.h. ein inkompressibles Fluid gilt.

Wir nutzen nun beide Gleichungen (1.106) und (1.105). Für konstantes ρ , wie für (1.106) gefordert, und zusätzlich Wirbelfreiheit und zeitlicher Konstanz des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v}

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = 0, \quad (1.107)$$

folgen weitere Vereinfachungen

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{2} v^2 + p \right) = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.108)$$

Die erste dieser Gleichungen ist leicht gelöst und liefert die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\rho}{2} v^2 + p = \text{konstant}. \quad (1.109)$$

Die Wirbelfreiheit von \vec{v} hatten wir zusätzlich gefordert. Wir können nicht zeigen, daß sie notwendigerweise erfüllt ist. Wir werden aber sehen, daß diese Bedingung mit den anderen gemeinsam erfüllt werden kann. Wirbelfreiheit bedeutet, daß \vec{v} als Gradient einer “Potentialfunktion” u geschrieben werden kann

$$\vec{v} = \vec{\nabla} u. \quad (1.110)$$

Man nennt ein solches Geschwindigkeitsfeld auch “Potentialströmung”. Eine derartige Potentialströmung, insbesondere wenn sie quellfrei ist, erfolgt laminar, d.h. in Schichten.

Wir betrachten inkompressible Fluide in zylindersymmetrischen Geometrien.

Aus der Divergenzfreiheit von \vec{v} folgt wie in unserer Behandlung der Beispiele zur Elektrostatik, daß es eine weitere skalare Funktion w geben muß, so daß u und w die Cauchy-Riemann DGL erfüllen bzw.

$$\Omega := u + iw \quad \text{ist holomorph.} \quad (1.111)$$

Das Geschwindigkeitsfeld berechnet sich aus der holomorphen Funktion Ω wie

$$\vec{v} = \vec{\nabla}u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ -\partial_x w \end{pmatrix} \hat{=} \overline{\Omega'}. \quad (1.112)$$

Wie im Fall der Elektrostatik sind die Gradienten der beiden Funktionen u und w senkrecht zueinander, also ist insbesondere $\vec{\nabla}u$ parallel zu $w = \text{konstant}$, eine Gleichung, die die Stromlinien liefert.

Anwendung: Magnus-Effekt

Wir suchen ein / das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} , das asymptotisch konstant \vec{v}_0 wird bzw. gerade Stromlinien hat und in unmittelbarer Nähe eines Zylinders mit Radius R kreisförmige Stromlinien. Mit anderen Worten: Der Imaginärteil w soll asymptotisch eine lineare Funktion der Ortsvariablen sein und auf der Zylinderoberfläche konstant. Eine derartige holomorphe Funktion (die Funktion) ist

$$\Omega(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log \frac{z}{R} \quad (1.113a)$$

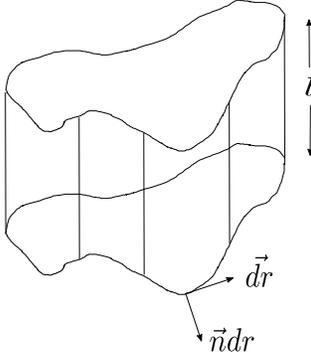
$$\Omega(z) \simeq v_0 z, \quad \Omega(R \exp(i\phi)) = 2v_0 R \cos \phi + \Gamma\phi/2\pi \quad (\text{rein reell!}) \quad (1.113b)$$

$$\Omega'(z) = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \quad (1.113c)$$

$$\vec{v} = \overline{\Omega'(z)} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{\bar{z}^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\bar{z}}, \quad (1.113d)$$

wobei Γ eine beliebige reelle Konstante ist.

Was ist die Kraft, die auf einen umströmten Zylinder wirkt?



Wir integrieren den Druck in geeigneter Weise über einen Zylindermantel der Höhe l und erhalten die Kraft \vec{F} . Beachte, daß auf ein Randelement dr die Kraft $p(-\vec{n})dr$ wirkt, wobei \vec{n} der Normalenvektor nach außen ist. Wenn $\vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ in Richtung positiven Umlaufs des Weges zeigt, dann zeigt \vec{n} in die um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Richtung, d.h. $\vec{n}dr = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung (1.109) erhalten wir

$$\vec{F}/l = \int_{\text{Rand}} p(-\vec{n})dr = \int_{\text{Rand}} \left(-\frac{\rho}{2}v^2 + \text{konst.}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}}_{=i(dx+idy)} = -\frac{\rho i}{2} \int_{\text{Rand}} v^2 dz. \quad (1.114)$$

Wir wollen nun v^2 in geeigneter Weise durch Ω ausdrücken. Man überlege sich zunächst, daß $z\Omega'(z)$ auf $|z| = R$ rein imaginär ist, sodann folgt aus $z\Omega'(z) = -z\Omega'(z)$

$$|z\Omega'(z)|^2 = -(z\Omega'(z))^2 \Rightarrow v^2 = |\Omega'|^2 = -\frac{z^2}{|z|^2}\Omega'^2 = -\frac{z^2}{R^2}\Omega'^2, \quad (1.115)$$

wobei der letzte Ausdruck besonders geeignet ist, da er eine holomorphe Funktion mit isolierter Singularität ist. Das Konturintegral ergibt sich aus dem Residuum

$$\vec{F}/l = -\frac{\rho i}{2} \left(-\frac{1}{R^2}\right) \int_{\text{Rand}} [z\Omega'(z)]^2 dz = \frac{\rho i}{2} \frac{1}{R^2} \int_{\text{Rand}} \left[v_0 \left(z - \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \right]^2 dz \quad (1.116a)$$

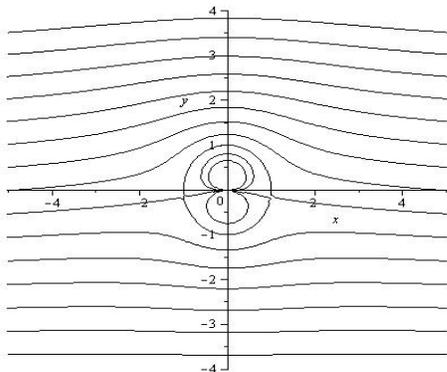
$$= \frac{\rho i}{2} \frac{1}{R^2} \cdot 2v_0(-R^2) \frac{\Gamma}{2\pi i} \int_{\text{Rand}} \frac{1}{z} dz = -i\rho v_0 \Gamma. \quad (1.116b)$$

Die Kraft wirkt insbesondere senkrecht zur Anströmrichtung.

Die Größe Γ ist die Vortizität des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} . Beachte, daß \vec{v} zwar lokal wirbelfrei ist, der Definitionsbereich von \vec{v} aber nicht einfach zusammenhängend ist.

$$\Gamma = \int \Omega' dz = \int (v_x - iv_y)(dx + idy) = \int (v_x dx + v_y dy) + i \underbrace{\int (v_x dy - v_y dx)}_{=0} = \int \vec{v} d\vec{r}, \quad (1.117a)$$

wobei das zweite Integral aus verschiedenen Gründen null sein muß (1. der Imaginärteil von Γ muß verschwinden, 2. das Feld $\begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$ hat das Potential $w = \text{Im}\Gamma(z)$ welches außerhalb $z = 0$ wohldefiniert ist).



Erzeugt mit Maple

```
Omega:=proc (z) options operator, arrow; z+1/z-((1/2)*I)*G*log(z)/Pi end proc
S:={}; for i from -6 to 8 do p[i]:=implicitplot(subs(G=-2,Im(Omega(x+I*y)))
=(1/2)*i,x=-10..10,y=-10..10,gridrefine=3, color=black); S:='union'(S,{p[i]})
end do
display(S, view=[-5..5,-4..4])
```

1.6 Potenzreihen

Wie in der reellen Analysis betrachten wir

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (\text{hier } a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}), \quad (1.118)$$

und zeigen, daß es einen wohldefinierten *Konvergenzradius* (KR) R zur Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß

- die Reihe für alle $|z - z_0| < R$ konvergiert,
- die Reihe für kein $|z - z_0| > R$ konvergiert,
- die Reihe innerhalb des KR eine holomorphe Funktion definiert, wobei für Ableitung und Stammfunktion Ausdrücke gelten, die durch gliedweises Ableiten bzw. Integrieren gewonnen werden, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}, \quad (1.119)$$

sind Reihen mit gleichem KR R und sind die Ableitung bzw. Stammfunktion zur Ausgangsreihe.

Umgekehrt gilt das

Theorem 1.11. “Cauchy-Taylor”

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und eine ganze Kreisscheibe mit Radius R um z_0 gehöre zu

G , dann gibt es eine Potenzreihe zu f mit $KR \geq R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{mit } a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int ds \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}, \quad (1.120)$$

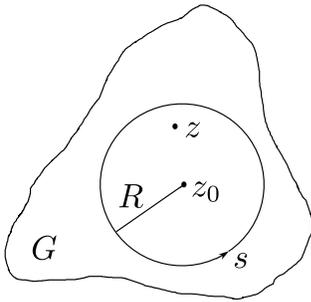
wobei das Integral mit einer einfach geschlossenen Kontur um z_0 (im mathematisch positiven Sinn) zu nehmen ist.

Beweis. Sei z ein Punkt innerhalb des Kreises um z_0 mit Radius R .

Nach Cauchy gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreis}} ds \frac{f(s)}{s - z}, \quad (1.121)$$

wobei der Nenner-Term in $z - z_0$ entwickelt werden kann,



$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{s - z_0} \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{s - z_0}} \quad (1.122a)$$

$$= \frac{1}{s - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}}, \quad (1.122b)$$

da $(z - z_0)/(s - z_0)$ betragslich kleiner als 1 ist.

Da die Konvergenz absolut und gleichmäßig ist, können Integration und Reihe vertauscht werden

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreis}} ds f(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}} \quad (1.123a)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \underbrace{\int_{\text{Kreis}} ds \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}}_{\stackrel{(1.57)}{=} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)} \quad (1.123b)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (1.123c)$$

□

Bemerkung:

- Anhand der obigen Herleitung sieht man auch, daß die Konvergenz von (1.123c) auch gleichmäßig ist in Kreisscheiben um z_0 mit Radius kleiner als R .
- Offensichtlich ist die Reihendarstellung eindeutig.

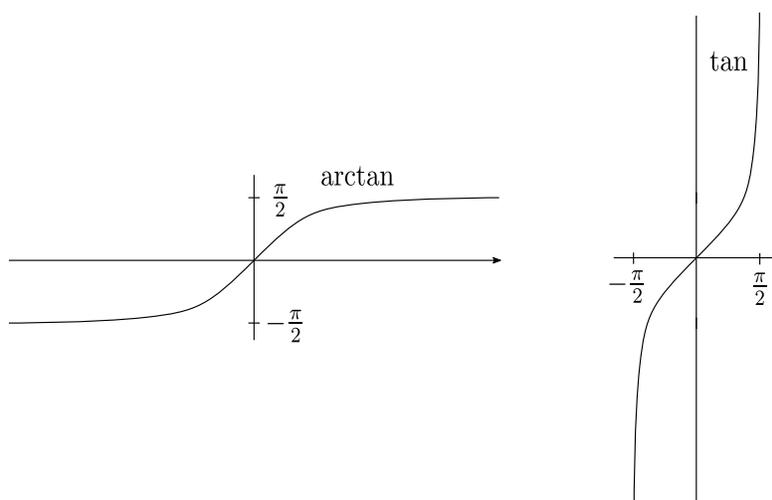
- Wir werden bald sehen, daß auf zusammenhängenden Gebieten zwei holomorphe Funktionen überall übereinstimmen müssen, wenn sie schon in einem Teilgebiet übereinstimmen. Daher gilt

Ist $f(z)$ um z_0 holomorph und ist z_p eine Polstelle minimalen Abstands zu z_0 (bzw. z_p ist irgendein Punkt minimalen Abstands von z_0 , an dem komplexe Differenzierbarkeit nicht mehr vorliegt), dann gilt

$$\text{Konvergenzradius} = |z_p - z_0|. \quad (1.124)$$

(Hier wurde vorausgesetzt, daß $f(z)$ auf einem maximalen Gebiet definiert ist, über das hinaus nicht fortgesetzt werden kann. Mehr dazu später.) Grund für (1.124): Nach Cauchy-Taylor kann der KR nicht kleiner als $|z_p - z_0|$ sein. Wenn nun KR größer als $|z_p - z_0|$ wäre, würde durch die Potenzreihe eine Funktion definiert, die auch bei z_p holomorph wäre. Dies wäre ein Widerspruch zur Übereinstimmung mit $f(z)$.

Beispiel(e) 1.11. (i) *Reihendarstellung für arctan als Umkehrfunktion zu tan.*



Die Funktion \tan ist für reelle Argumente π -periodisch, aber im Komplexen konvergiert $\tan(z)$ für $\text{Im}(z) \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{\text{Im}(z) \rightarrow \pm\infty} \tan(z) = \pm i. \quad (1.125)$$

Wir leiten nun die Potenzreihendarstellung von \arctan um 0 her.

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} \Rightarrow \tan' = 1 + \tan^2 \quad (1.126a)$$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (1.126b)$$

$$\Rightarrow \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}. \quad (1.126c)$$

Der KR des \arctan ist offenbar gleich 1. Dies erscheint merkwürdig in Anbetracht des Graphen von \arctan mit reellen Argumenten (s.o.). Aber im Komplexen besitzt die Funktion Singularitäten (aber keine Polstellen) bei $\pm i$ wegen der Asymptotik von \tan (1.125).

Beispiel(e) 1.12. (ii) *Asymptotik der Bernoulli-Zahlen*

Wir betrachten die erzeugende Funktion der Bernoulli-Zahlen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n := \frac{z}{e^z - 1}, \quad (1.127)$$

wobei die rechte Seite auf ganz \mathbb{C} holomorph ist, außer bei ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ wo Polstellen erster Ordnung vorliegen. Eine Ausnahme davon ist $z = 0$, wo eine hebbare Polstelle vorliegt. Daher ist die rechte Seite von (1.127) eine um $z_0 = 0$ holomorphe Funktion, die entwickelt werden kann. Der KR muß gleich dem Abstand von $z_0 = 0$ zu den nächstgelegenen Polstellen sein, diese sind $\pm 2\pi i$, also $\text{KR} = 2\pi$. Damit erhalten wir das asymptotische Verhalten

$$\frac{B_n}{n!} \sim \frac{1}{(2\pi)^n}. \quad (1.128)$$

1.7 Laurent-Reihen

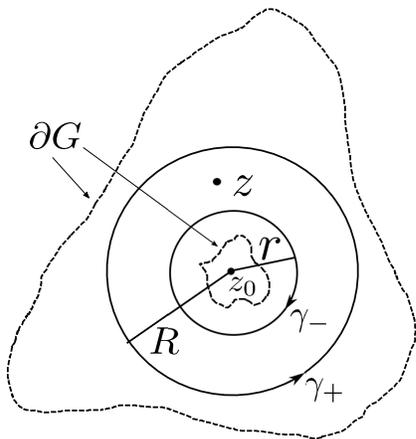
Definition 1.16. *Potenzreihen der Form*

$$L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.129)$$

heißen *Laurent-Reihen*. Die Teilreihe mit negativen Exponenten n heißt *Hauptreihe*, die mit positiven n heißt *Nebenreihe*. Die *Laurentreihe* ist konvergent genau dann, wenn dies für *Haupt- und Neben-Reihe* gilt.

Wo tauchen Laurentreihen auf?

f mag in einem “Ring” um einen Punkt z_0 definiert und dort holomorph sein bzw. der Definitionsbereich von f habe ein Loch.



Wir setzen nun voraus, daß f holomorph ist auf einem Bereich G mit “Loch”, aber ein Ring mit innerem/äußerem Radius r/R um einen Punkt z_0 ganz in diesen Bereich fällt. Wir benutzen geschlossene Integrationswege γ_{\pm} mit Radien R/r , die im positiven/negativen Sinn durchlaufen werden. Ferner ist $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ eine geschlossene Kontur, die den Ring genau einmal im positiven Sinn umläuft. (Dazu evtl. zwei entgegengesetzt durchlaufene infinitesimal benachbarte Verbindungsstücke zwischen γ_+ und γ_- einführen.) Nach Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-} ds \frac{f(s)}{s - z} \quad (1.130a)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} ds \frac{f(s)}{s - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} ds \frac{f(s)}{s - z}. \quad (1.130b)$$

Das erste Integral mit Weg γ_+ wertet sich wie oben in (1.123b) aus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} ds \frac{f(s)}{s-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \int_{\text{Kreis}} ds \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}. \quad (1.131)$$

Für das zweite Integral mit Weg γ_- benutzen wir auch eine Aufspaltung und Entwicklung des Nenners, wobei wir aber benutzen, daß $(s-z_0)/(z-z_0)$ betraglich kleiner als 1 ist

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0+z_0-z} = \frac{1}{z_0-z} \frac{1}{1+\frac{s-z_0}{z_0-z}} \quad (1.132a)$$

$$= \frac{1}{z_0-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad (1.132b)$$

Damit wertet sich das zweite Integral aus zu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} ds \frac{f(s)}{s-z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \int_{\text{Kreis}} ds (s-z_0)^n f(s), \quad (1.133)$$

wobei hier der Kreis um z_0 im positiven Sinn zu umlaufen ist (damit heben sich zwei Minuszeichen weg). Wenn wir in (1.133) den Summationsindex n durch $-(n+1)$ ersetzen, erhalten wir den Ausdruck in (1.131), aber mit Indexmenge $n = -\infty, \dots, -1$. Damit erhalten wir für (1.130b) die Laurentreihe

$$L(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreis}} ds \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}. \quad (1.134)$$

Bemerkung: Der Koeffizient a_{-1} heißt das *Residuum* ($\text{res}_{z_0} f$) von f in z_0 . Offenbar gilt $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreis um } z_0} dz f(z)$.

1.8 Isolierte Singularitäten, holomorphe Fortsetzungen

Wir stellen nun Fragen zu Funktionen, die holomorph bei z_0 mit bzw. ohne diesen Punkt sind. Im letzteren Fall nennt man z_0 eine "isolierte Singularität". Kann der Funktionswert $f(z_0)$ beliebig häufig in der Nähe von z_0 angenommen werden? (usw.)

A) Sei f bei z_0 holomorph mit Taylorreihe und $\text{KR} > 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (1.135)$$

- $f(z)$ ist genau dann konstant, wenn alle $a_n = 0$ für $n \geq 1$.

- Ist $f(z)$ nicht konstant, dann gibt es einen kleinsten Index $n_0 \geq 1$, so daß $a_{n_0} \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = f(z_0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1.136a)$$

$$= f(z_0) + (z - z_0)^{n_0} \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-n_0}}_{=: g(z)}, \quad (1.136b)$$

wobei die Reihe zu $g(z)$ den gleichen Konvergenzradius wie die von $f(z)$ hat. Innerhalb dieses Radius ist $g(z)$ holomorph, insbesondere stetig und $\neq 0$ bei $z = z_0$, da $a_{n_0} \neq 0$. Man nennt n_0 die *Ordnung* der $f(z_0)$ -Stelle. (Im Falle $f(z_0) = 0$ ist n_0 die Ordnung der *Nullstelle*.)

- Insbesondere gilt: Ist $f(z)$ nicht konstant, so gibt es eine Umgebung um z_0 , in der der Wert $f(z_0)$ nur bei $z = z_0$ angenommen wird.

B) Sei f um z_0 holomorph, aber bei z_0 nicht definiert. Dann kann vorliegen

- (i) f bei z_0 beschränkt,
- (ii) $f(z_n) \rightarrow \infty$ für alle Folgen $z_n \rightarrow z_0$,
- (iii) Weder (i) noch (ii) z.B. $f(z) = e^{1/z}$ mit $z_0 = 0$.

zu (i): Man kann $f(z)$ als Laurentreihe schreiben, wobei der Hauptteil 0 ist! Für negative Indizes gilt nämlich

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreis}} ds f(s) (s - z_0)^{-n-1}. \quad (1.137)$$

wobei der Integrand aus dem Faktor $f(s)$ (holomorph, außer bei z_0 , aber beschränkt) und der Potenz von $s - z_0$ mit Exponenten $-n - 1 \geq 0$ besteht, also kann der Integrationsweg auf einen beliebig engen Kreis um z_0 zusammengezogen werden mit Grenzwert des Integrals 0.

$f(z)$ kann also durch die Taylorreihe bei z_0 holomorph fortgesetzt werden. Man könnte sagen “ $f(z)$ ist eigentlich auch bei z_0 holomorph.”

Bemerkung: Alternativ kann man auch argumentieren, daß $g(z) := (z - z_0) \cdot f(z)$ mit stetiger Fortsetzung $g(z_0) := 0$ die Voraussetzungen des Cauchy-Integralsatzes erfüllt. Damit hat g eine holomorphe Stammfunktion, ist selbst holomorph und hat eine Taylorreihe mit konstantem Glied gleich null.

zu (ii): Unter der genannten Bedingung muß es eine Umgebung um z_0 geben, in der $|f(z)| > 1$ gilt. (Denn sonst gäbe es eine Folge von z_n , $\lim z_n = z_0$, mit $|f(z_n)| \leq 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.) Dann ist

$$h(z) := \frac{1}{f(z)}, \quad (1.138)$$

in der Umgebung von z_0 (ohne z_0) wohldefiniert und durch 1 beschränkt. Damit ist $h(z)$ vom Typ (i) und somit holomorph mit hebbarer isolierter Singularität bei z_0 und Ergebnis $h(z_0) = 0$. Die Taylorreihe lautet

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{mit } a_0 = 0. \quad (1.139)$$

Sei n_0 die Ordnung der Nullstelle bei z_0 , dann

$$h(z) = (z - z_0)^{n_0} \cdot \tilde{h}(z), \quad (1.140)$$

wobei $\tilde{h}(z)$ holomorph und $\neq 0$ in ganzer Umgebung von z_0 ist. Daher gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \cdot \frac{1}{\tilde{h}(z)}, \quad (1.141)$$

also ist z_0 Polstelle n_0 -ter Ordnung.

zu (iii): Die Laurentreihe (existiert immer):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (1.142)$$

muß ∞ -viele $a_n \neq 0$ mit $n \leq -1$ haben, denn sonst wäre z_0 Polstelle oder sogar hebbar.

Insbesondere muß eine derartige Laurentreihe bei z_0 unbeschränkt sein, aber gegen z_0 konvergente Folgen zulassen, für die $f(z_n)$ nicht gegen ∞ konvergiert.

Definition 1.17. (*Meromorphe Funktionen*) Funktionen, die nur isolierte Singularitäten vom Typ Polstelle haben, heißen meromorph.

Für eine Funktion $f(z)$ mit Polstelle n . Ordnung bei z_0 berechnet sich das Residuum bei z_0 durch

$$\text{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-1} [(z - z_0)^n f(z)] \quad (1.143)$$

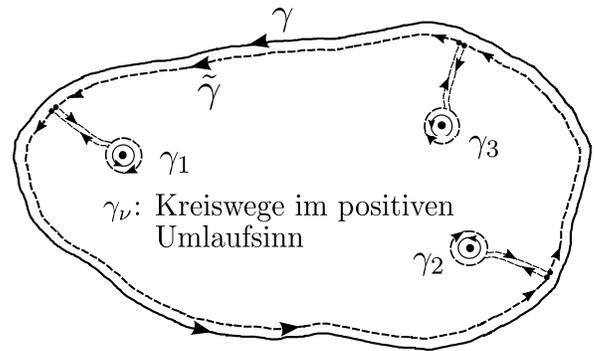
Theorem 1.12. (*Residuensatz*)

Sei f holomorph bis auf isolierte Singularitäten, γ ein nullhomologer Weg, der im Definitionsbereich von f verläuft und die Singularitäten meidet. Die Menge S der isolierten Singularitäten, die von γ umlaufen werden, ist endlich (warum?). Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz f(z) = \sum_{z_\nu \in S} n_{\gamma}(z_\nu) \text{res}_{z_\nu} f. \quad (1.144)$$

Beweis. Beweis nach Cauchy.

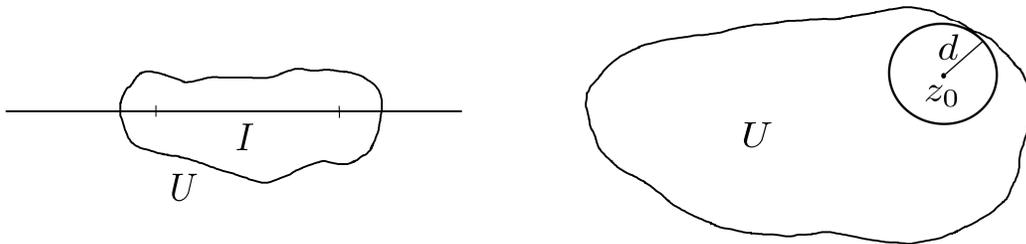
Wir illustrieren den Fall, bei dem der Weg γ die umlaufenen isolierten Singularitäten genau einmal im positiven Sinn umrundet. Wir definieren einen Weg $\tilde{\gamma}$ durch Deformation von γ : Wir umrunden jede Singularität z_ν durch eine "Ausstülpung" im Uhrzeigersinn. Der Weg $\tilde{\gamma}$ hat im Inneren keine Singularität, $\int_{\tilde{\gamma}} dz f(z) = 0$. Die Differenz aus $\int_{\gamma} dz f(z)$ und $\int_{\tilde{\gamma}} dz f(z)$ ist aber die Summe der Integrale über $f(z)$ entlang der "kleinen" Kreise um die Singularitäten, dies liefert aber genau die Summe der Residuen.



□

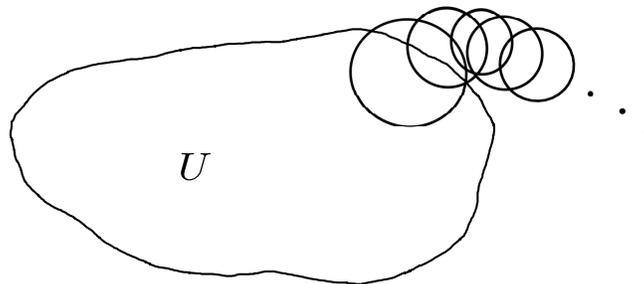
Holomorphe Fortsetzung

1) Eine (reelle) Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) mit $I \subset \mathbb{R}$ heißt holomorph fortsetzbar, wenn eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit offener Menge $U \subset \mathbb{C}$ als Definitionsbereich existiert, so daß f auf I beschränkt gleich g ist: $f|I = g$.



2) Auch für $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ kann eine holomorphe Fortsetzung existieren. Die Taylorreihe um einen Punkt z_0 hat einen KR, der mindestens dem Abstand d zum Rand von U entspricht. Der KR kann aber größer sein. Dann kann der Definitionsbereich von f auf $\tilde{U} \supset U$ vergrößert werden. Man erhält \tilde{f} auf \tilde{U} mit $\tilde{f}|U = f$.

Dies führt auf das Konzept der *maximalen holomorphen Fortsetzung*. Idee:



Fragen:

- Wie weit fortsetzbar? (Entlang eines gegebenen "Weges" immer eindeutig.)
- Was passiert, wenn man zurückkehrt? Antwort ist nicht-trivial im Falle des Logarithmus und anderer Beispiele.

Im praktischen Leben arbeitet man durchaus anders, also ohne Taylorreihen: siehe Γ -Funktion.

Bemerkung: Die Eindeutigkeit wird über ein Standardargument der Topologie geführt. Wir betrachten holomorphe Funktionen $U \rightarrow \mathbb{C}$, wobei U ein Gebiet ist, d.h. eine offene zusammenhängende Menge. Wir wollen zeigen, daß zwei derartige Funktionen schon auf ganz U gleich sind, wenn sie in einer “kleinen” Umgebung eines Punktes gleich sind. Wir führen dies auf die Aussage zurück: Eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist schon auf ganz U null, wenn sie in einer “kleinen” Umgebung eines Punktes gleich null ist. Definiere dazu komplementäre “Eigenschaften” der Punkte $z_0 \in U$: (i) es gibt eine Umgebung von z_0 auf der f identisch null ist, (ii) es gibt eine Umgebung von z_0 auf der f höchstens an einem Punkt null ist. (Offenbar schließen sich (i) und (ii) gegenseitig aus; mit Taylor: einen anderen Fall als (i) bzw. (ii) gibt es nicht.). U zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen U_1, U_2 in denen (i) bzw. (ii) erfüllt sind. Man zeige: U_1, U_2 sind offene Mengen. Da U zusammenhängend ist, folgt nun, daß entweder $U = U_1$ oder $U = U_2$ ist. Aber U_1 kann nicht leer sein, damit gilt $U = U_1$.

Die Gamma-Funktion: $\Gamma(z)$

Sie haben z.B. in den Übungen schon kennengelernt

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1 + z/n}, \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}, \quad (1.145)$$

wobei γ die Euler–Mascheroni-Konstante ist $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln m)$.

Wir wollen hier jedoch zunächst die vielleicht besser bekannte Integralformel

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \text{für } \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.146)$$

zur Definition benutzen und später die Identität zu (1.145) beweisen. Beachte, daß (1.145) auf einem viel größeren Bereich definiert ist als (1.146). Wir werden daher u.a. eine holomorphe Fortsetzung zu (1.146) konstruieren müssen.

Beachte, daß das Integral in (1.146) existiert, wenn die Singularität von t^{z-1} bei $t = 0$ integrierbar ist. Dies ist der Fall für $\operatorname{Re}(z - 1) > -1$. Sodann ist das Integral nicht nur in $\operatorname{Re} z > 0$ nicht nur definiert, sondern auch holomorph.

Es gilt

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1. \quad (1.147)$$

Beweis.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1, \quad (1.148a)$$

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^z = \underbrace{-e^{-t} t^z \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} dt e^{-t} z t^{z-1} = z\Gamma(z) \quad (1.148b)$$

□

Bemerkung: $\Gamma(n + 1) = n!$

Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} :

- nutze die Vorschrift $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ als Definition,
- dort, wo $\Gamma(z)$ schon definiert ist, liegt kein Konflikt vor, da dort die “Vorschrift” eine Identität ist.

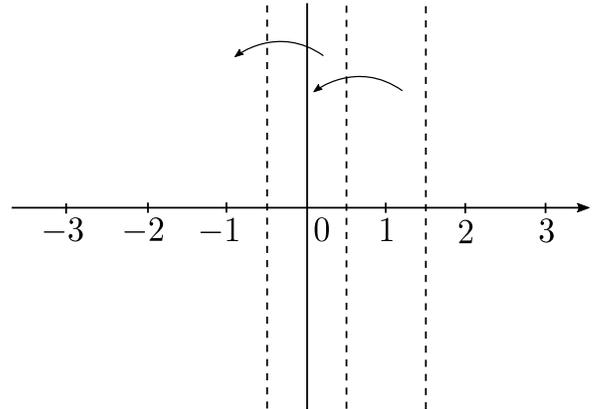
“Was passiert:”

Fortsetzung aus dem Streifen der Breite 1 um $z = 1$ zu Streifen der Breite 1 um $z = 0$ liefert eine einfache Polstelle bei $z = 0$ mit Residuum 1.

Weitere Fortsetzungen erzeugen aus der Polstelle bei $z = 0$ weitere Polstellen bei $z = -1, -2, \dots$, aber keine “neuen”. Alle Polstellen sind 1. Ordnung mit Residuum

$$\operatorname{res}_{-m}\Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.149)$$

(Es gibt kein Problem mit Mehrdeutigkeit wie beim Logarithmus.)



Funktionalgleichung:

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1.150)$$

Hieraus folgt im übrigen, daß $\Gamma(z)$ nirgendwo eine Nullstelle hat.

Beweis. Definiere $g(z) := \Gamma(z)\Gamma(1 - z)$, eine Funktion mit Polstellen 1. Ordnung genau bei \mathbb{Z} , sonst holomorph. Periodizität

$$g(z + 1) = \underbrace{\Gamma(z + 1)}_{z\Gamma(z)} \underbrace{\Gamma(-z)}_{\Gamma(1-z)/(-z)} = -g(z) \quad (1.151)$$

Das Residuum bei $z = 0$ ist $+1$, alle anderen Residuen sind ± 1 . Außerdem gilt

$$\lim_{z \rightarrow \pm i\infty} \Gamma(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \rightarrow \pm i\infty} g(z) = 0. \quad (1.152)$$

Betrachte nun $h(z) := g(z) - \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. Diese Funktion besitzt bei $k \in \mathbb{C}$ isolierte Singularitäten, wobei sich aber die Residuen der beiden Summanden genau zu 0 wegheben. Es handelt sich im Falle $h(z)$ um hebbare Singularitäten. Da $h(z)$ holomorph, (anti-) periodisch ist mit Asymptotik (1.152), ist $h(z)$ auf ganz \mathbb{C} beschränkt. Nach dem Satz von Liouville, Theorem 1.9, ist $h(z)$ konstant. Diese Konstante muß aber 0 sein, da sie die Asymptotik (1.152) erfüllen muß (alternativ: sie muß anti-periodisch sein \Rightarrow Konstante = 0). \square

Wir wollen nun den Beweis von (1.145) andeuten.

- Zunächst einmal überzeuge man sich, daß das unendliche Produkt für jedes erlaubte z konvergiert. Dazu den Logarithmus nehmen und die Konvergenz der Reihe beweisen. Dazu ist hilfreich zu beachten, daß

$$\log \left(\frac{e^{z/n}}{1 + z/n} \right) = \frac{1}{2}(z/n)^2 + \mathcal{O}((z/n)^3), \quad (1.153)$$

was summierbar ist.

- Man zeige für die Funktion in (1.145) dieselbe Rekursionsgleichung mit gleichem Funktionswert bei $z = 1$ gilt wie in (1.147).
- Betrachte die Funktion

$$h(z) := \frac{\Gamma_{\text{Produkt}}(z)}{\Gamma_{\text{Integral}}(z)}, \quad (1.154)$$

die auf ganz \mathbb{C} definiert und dort holomorph ist (die Polstellen heben sich weg). Ferner ist $h(z)$ periodisch mit Periode 1. Wenn wir beweisen können, daß $h(z)$ für $z \rightarrow \pm i\infty$ konvergiert oder zumindest beschränkt ist, so wissen wir nach Liouville, daß $h(z)$ konstant ist. Und wegen $h(1) = 1$ muß dann $h(z) = 1$ für alle z gelten.

Es ist jedoch schwierig die Beschränkung von $h(z)$ zu zeigen, da Zähler wie Nenner gegen null gehen für $z \rightarrow \pm i\infty$. Es ist leichter die Beschränkung von $(\log h(z))'$ zu zeigen. Da auch $(\log h(z))'$ holomorph ist, folgt die Konstanz von $(\log h(z))'$. Dann ist $\log h(z) = az + b$ mit Konstanten a, b , die beide reell sein müssen. Sodann muß aber wegen der Periodizität von $h(z)$ das reelle a gleich 0 sein. Zum Schluß überlegt man mit $z = 1$ setzen, daß $b = 0$.

Spezielle Werte und Anwendungen der $\Gamma(z)$ -Funktion

1) Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Beweis. Setze in (1.150) $z = 1/2$. □

2) Wir bestimmen die Oberfläche S_{n-1} der $(n - 1)$ -dimensionalen Einheitssphäre in \mathbb{R}^n :

$$S_{n-1} = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (1.155)$$

Beweis. Wir berechnen das n -dimensional Gaußintegral auf zwei Weisen. Zunächst benutzen wir die Radialsymmetrie

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n r e^{-r^2} = \int_0^\infty dr r^{n-1} S_{n-1} e^{-r^2} = \frac{S_{n-1}}{2} \int_0^\infty dt t^{n/2-1} e^{-t} = \frac{S_{n-1}}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \quad (1.156)$$

wobei wir bei der zweiten Umformung die Variablensubstitution $r^2 = t$, $2r dr = dt$ benutzt haben.

Nun nutzen wir die Faktorisierung des n -dimensionalen Gaußintegrals

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n r e^{-r^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} dr e^{-r^2} \right)^n. \quad (1.157)$$

Wir kennen den Wert des 1-dimensionalen Integrals: $\sqrt{\pi}$. Wir wollen dies mit den obigen Ausdrücken (1.156) und (1.157) schnell erneut herleiten. Betrachte den Fall $n = 2$, dann erhalten wir

$$\left(\int_{\mathbb{R}} dr e^{-r^2} \right)^2 = \frac{S_1}{2} \Gamma(1) = \frac{2\pi}{2} 1 = \pi, \quad (1.158)$$

Dies mit (1.156) und (1.157) im allgemeinen Fall liefert (1.155). \square

Bemerkung: Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir: $S_0 = 2\pi^{\frac{1}{2}}/\Gamma(\frac{1}{2}) = 2$, $S_1 = 2\pi/\Gamma(1) = 2\pi$ (klar), $S_2 = 2\pi^{\frac{3}{2}}/\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\pi$.

3) Identität

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right). \quad (1.159)$$

Beweis. Wie oben schon genutzt ist die Γ -Funktion durch $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(1) = 1$, Holomorphie für $\text{Re}z > 0$ und verschwindende Asymptotik für $z \rightarrow \pm i\infty$ charakterisiert. Dies gilt auch für die rechte Seite der obigen Gleichung

$$\text{r.S.}(z+1) = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) \underbrace{\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)}_{= \frac{z}{2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} = z \cdot \text{r.S.}(z), \quad (1.160a)$$

$$\text{r.S.}(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = 1. \quad (1.160b)$$

\square

2 Fourier-Transformation

2.1 Fourier-Reihen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ eine 2π -periodische Funktion. Wir interessieren uns für “Darstellungen” von f der Art

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_k e^{ikx}, \quad (2.1)$$

wobei die rechte Seite offenbar 2π -periodisch ist. Es stellen sich Fragen:

- Sind die Funktionen $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$ ein vollständiges Funktionensystem? (Antwort: ja.)
- Welcher Art ist die Konvergenz (gleichmäßig, punktweise, im quadratischen Mittel)?

- Sind die Fourierkoeffizienten eindeutig? (Antwort: ja.)

Wenn bekannt ist, daß (2.1) gilt, dann müssen die \tilde{f}_k von der Form (2.2) sein:

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (2.2)$$

Bemerkung: Das Arbeiten mit Fourier-Darstellungen wird Fourier-Analyse genannt. Eine Darstellung einer Funktion $f(x)$ mittels Fouriertransformation wie (2.1) heißt auch

- Wellenzahldarstellung bzw. Impulsdarstellung (in QM: $p = \hbar k$), wenn x eine Ortsvariable ist. Es sind “konjugiert” zueinander x (Ort) und k (Wellenzahl bzw. -vektor in höheren Dimensionen).
- Frequenzdarstellung, wenn x eine Zeitvariable ist. Dann benutzt man eher t für x und ω für k . Konjugiert: t (Zeit) und ω (Frequenz).
- Insbesondere im Falle von Frequenzdarstellungen heißt die niedrigste auftretende Frequenz ungleich 0 die Grundfrequenz, die Beiträge zu höheren Frequenzen sind Oberschwingungen etc.

Propädeutik (Konstruktion am 04.05.2020 überspringen, Rückkehr nach Besprechung von Reihenentwicklungen im Kapitel 1):

Sei f eine 2π -periodisch Funktion, die holomorph in einer Nachbarschaft von \mathbb{R} ist. Dann liegt gleichmäßige Konvergenz vor.

Mit den Eigenschaften von f ist

$$g(z) := f\left(\frac{1}{i} \log(z)\right), \quad (2.3)$$

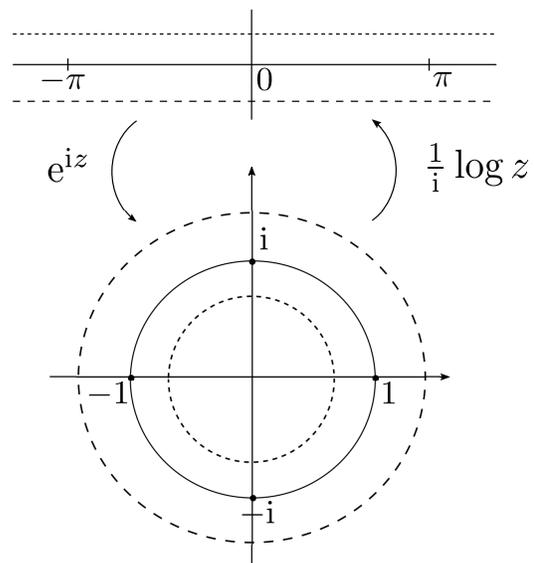
eine in einem Ring, der den Einheitskreis enthält, wohldefinierte und dort holomorphe Funktion. Für diese gibt es eine (gleichmäßig konvergente) Laurent-Reihe

$$g(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k, \quad (2.4)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Kreis}} z^{-k-1} g(z) \underbrace{dz}_{=e^{i\phi} i d\phi} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \quad (2.5a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} g(e^{i\phi}) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} f(\phi) d\phi. \quad (2.5b)$$



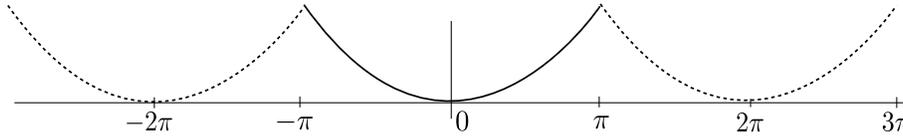
Einsetzen liefert

$$f(x) = g(e^{ix}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx}. \quad (2.6)$$

Also gilt (2.1) mit Fourierkoeffizienten $\tilde{f}_k = a_k$, d.h. (2.2).

Beispiel(e) 2.1. *Fouriertransformation einer – nur – stetigen Funktion (Theorie später).*

$$f(x) = x^2 \Big|_{[-\pi, \pi]}, \quad 2\pi - \text{periodisch fortgesetzt}. \quad (2.7)$$



Berechnung der Fourierkoeffizienten

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{= x^2} \underbrace{e^{-ikx}}_{=: e^{\alpha x}} dx, \quad \text{mit allgemeinem } \alpha, \text{ später } \alpha = -ik \text{ setzen}, \quad (2.8a)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{1}{\alpha} (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{\sinh \pi\alpha}{\alpha} \quad (2.8b)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\pi \cosh \pi\alpha}{\alpha} - \frac{\sinh \pi\alpha}{\alpha^2} \right) \quad (2.8c)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2 \sinh \pi\alpha}{\alpha} - \frac{2\pi \cosh \pi\alpha}{\alpha^2} + 2 \frac{\sinh \pi\alpha}{\alpha^3} \right) \Big|_{\alpha = -ik \neq 0} = \frac{1}{\pi} \left(0 - 2\pi \frac{(-1)^k}{(-ik)^2} + 0 \right) \quad (2.8d)$$

$$= \frac{2}{k^2} (-1)^k, \quad \text{für } k \neq 0. \quad (2.8e)$$

Das Ergebnis für $k = 0$ erhalten wir, indem wir die Funktion \sinh um 0 entwickeln

$$\frac{\sinh \pi\alpha}{\pi\alpha} = \frac{\pi\alpha + \frac{1}{3!}(\pi\alpha)^3 + \dots}{\pi\alpha} = 1 + \frac{(\pi\alpha)^2}{3!} + \dots \quad (2.9)$$

Die zweite Ableitung nach α liefert $\pi^2/3$, also

$$\tilde{f}_0 = \frac{\pi^2}{3}. \quad (2.10)$$

Es folgt

$$x^2 \Big|_{[-\pi, \pi]} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2}{k^2} (-1)^k e^{ikx} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} (-1)^k (e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad (2.11a)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx. \quad (2.11b)$$

“Anwendung”: Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.12)$$

2.2 Anwendung Fourierreihe in der Physik

Ganz allgemein beobachten wir

- Naturgesetze sind DGL,
- Translationsinvarianz in Raum und Zeit,
- fundamentale Gesetze sind (häufig) lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, z.B. Maxwell-Gleichungen “im Vakuum”,
- effektive Gesetze mögen abweichen, z.B. Maxwell-Gleichungen “in Materie”, das Pendel (nicht-linear).

Wir untersuchen hier den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} + r \frac{d}{dt} + C\right) \cdot f(t) = g(t), \quad (2.13)$$

wobei die Bedeutungen sind: m Masse, r Reibungskoeffizient, C Federkonstante, $f(t)$ zeitabhängige Auslenkung und $g(t)$ ist die externe Kraft.

Wir führen zur weiteren Verwendung, u.a. zur Abkürzung des Differentialoperators, das Polynom

$$P(x) := mx^2 + rx + C = m \left(x^2 + \frac{r}{m}x + \frac{C}{m}\right), \quad (2.14)$$

ein. Damit lautet die DGL

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot f(t) = g(t). \quad (2.15)$$

Wir stellen uns folgende Aufgabe:

Für eine gegebene äußere Kraft $g(t)$ mit 2π -Periodizität ist eine (spezielle) Lösung zu finden. Von der Lösung, die wir suchen, verlangen wir, daß sie auch 2π -periodisch ist. (Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Überlagerung mit der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und ist i.a. nicht 2π -periodisch.)

Wir lösen diese Aufgabe mittels Fourier-Darstellung der vorgegeben Kraft (wir nutzen statt Summationsindex ω das einfacher zu schreibende n):

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n e^{int}. \quad (2.16)$$

Gesucht ist

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n e^{inx}. \quad (2.17)$$

Bedingung

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n e^{inx}. \quad (2.18)$$

Nun ziehen wir den Differentialoperator in die Summe direkt vor die Exponentialfunktionen und erhalten für die linke Seite

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n P(in) e^{int}. \quad (2.19)$$

Die DGL (2.18) lautet nun

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_n P(in) e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n e^{int}. \quad (2.20)$$

und wird genau dann gelöst, wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\tilde{f}_n P(in) = \tilde{g}_n, \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}_n = \frac{\tilde{g}_n}{P(in)}. \quad (2.21)$$

Dies ist die Lösung des Problems in Frequenzdarstellung. Wir wollen aber nun diese Lösung maximal ästhetisch bzw. möglichst explizit unter Verwendung der Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ schreiben, also in der Zeitdarstellung. Dazu setzen wir das Ergebnis (2.21) in die Fourierreihe für $f(t)$ ein und ersetzen im zweiten Schritt \tilde{g}_n durch das Fourierintegral über $g(\tilde{t})$ mit einer unabhängigen Zeitvariablen \tilde{t}

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{g}_n}{P(in)} e^{int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tilde{t}) e^{-in\tilde{t}} d\tilde{t} \right) \frac{1}{P(in)} e^{int} \quad (2.22a)$$

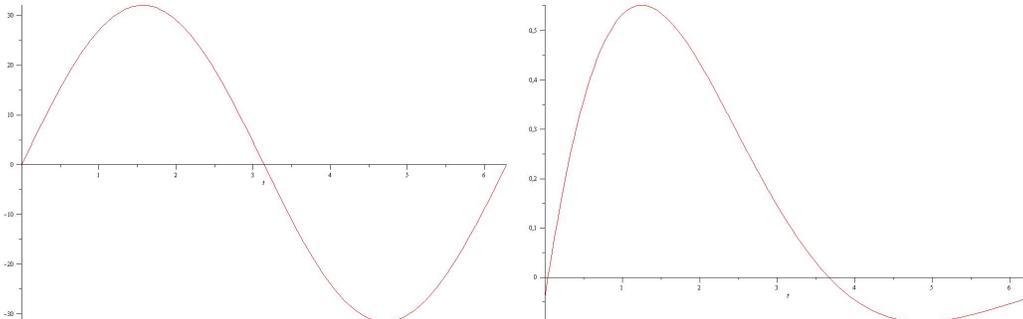
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{in(t-\tilde{t})}}{P(in)} \right)}_{=: k(t-\tilde{t})} g(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (2.22b)$$

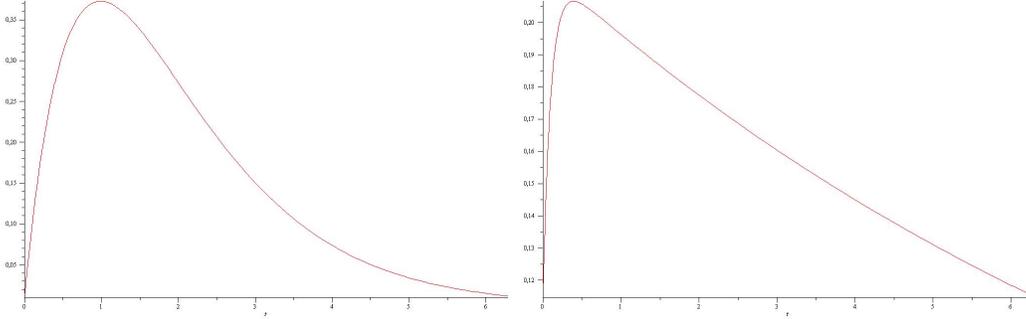
wobei wir zuletzt Summe und Integral vertauscht haben. Die Summe (Reihe) in der letzten Zeile definiert eine Funktion, die wir k nennen wollen (k wie ‘Kern’ oder ‘Integrkern’), mit Argument vom Typ Zeit. Diese Funktion ist unabhängig von der Kraftfunktion g und wird von uns explizit berechnet. Die Kenntnis von k erlaubt die Berechnung der speziellen Lösung der DGL ohne Rückgriff auf die Fouriertransformation nehmen zu müssen:

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} k(t-\tilde{t}) g(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad \text{auch } f = k * g, \quad (2.23)$$

wobei das verbleibende Integral vom Faltungstyp ist, was mit einem $*$ bezeichnet wird.

Wir wollen diese Funktion berechnen, geben aber vorab Plots des Ergebnisses von $k(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ für die Parametersätze $m = C = 1$ und $r = 0.01, 1, 2, 10$. Die Funktion k beschreibt die Auslenkung des Oszillators nach einem Kraftstoß (mehr siehe unten).





Erzeugt mit Maple

```
Nst:=solve(m*x^2+r*x+C=0,x): x[1]:=Nst[1]; x[2]:=Nst[2]:
m:=1: r:=10.0: C:=1:
k:=proc(t) options operator, arrow;
-(1/2)*(exp(x[2]*(t-Pi))/sinh(Pi*x[2])-exp(x[1]*(t-Pi))/sinh(Pi*x[1]))/
(m*(x[2]-x[1])) end proc
with(plots): plot(Re(k(t)), t=0..2*Pi):
```

Rechnung:

Wir benutzen den Residuensatz, den wir in der Allgemeinheit noch nicht kennengelernt haben, da wir die Behandlung der Fouriertransformation nach Wunsch aus der EP4a vorgezogen haben. Wir können ihn für unsere Anwendungen aus der Cauchy-Integralformel (1.7) herleiten.

Theorem 2.1. *Residuensatz (hier für Funktion mit Polstelle 1. Ordnung)*

Sei f eine Funktion, die innerhalb des (im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen) Weges γ überall holomorph ist, bis auf einen Punkt z_0 , bei dem eine Polstelle 1. Ordnung vorliegt. Es gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{res}_{z_0} f, \quad (2.24)$$

wobei das sog. Residuum von f in z_0 (für den Fall einer Polstelle 1. Ordnung) durch den Grenzwert

$$\text{res}_{z_0} f := \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)], \quad (2.25)$$

erklärt ist (mehr später). Falls mehrere Polstellen vorliegen, steht auf der rechten Seite eine Summe.

Beweis. Definiere die Funktion \tilde{f} durch

$$\tilde{f}(z) := (z - z_0) \cdot f(z), \quad (2.26)$$

wobei in z_0 der Grenzwert benutzt wird; \tilde{f} ist im gesamten Bereich holomorph (warum?). Wende nun auf \tilde{f} die Cauchy-Integralformel an. \square

Bemerkung: Eine Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ mit holomorphen $p(z)$, $q(z)$ mit einfacher (!) Nullstelle z_0 des Nenners hat hier ein Residuum, das sich durch Entwicklung des Nenners bei z_0 ergibt

$$(z - z_0) f(z) = (z - z_0) \frac{p(z)}{0 + q'(z_0) \cdot (z - z_0) + \dots} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (2.27)$$

Wir schreiben die auszuwertende Reihe als Konturintegral einer geeigneten Funktion mit einem geeigneten Weg (Achtung: ein $(-1)^n$ wird eingefügt, wird unten wieder “beseitigt”)

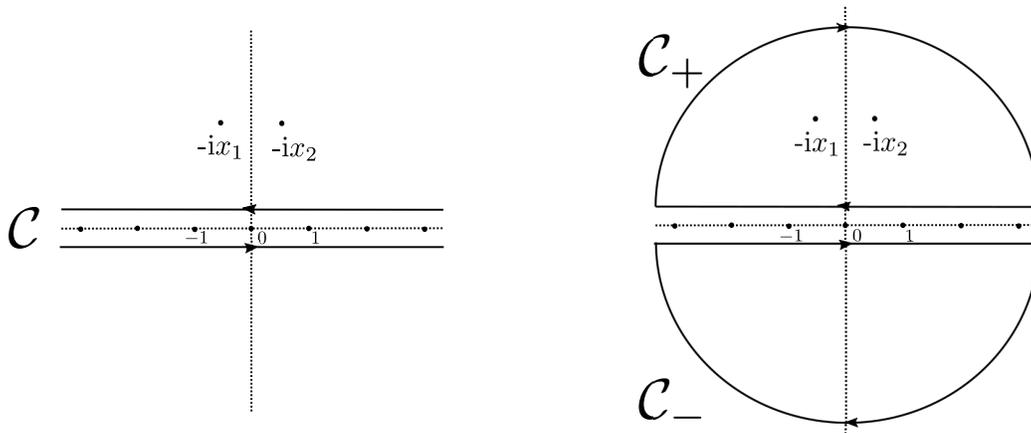
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{e^{int}}{P(in)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\pi}{\sin \pi n} \frac{e^{int}}{P(in)} dn, \quad (2.28)$$

wobei \mathcal{C} ein geschlossener Weg ist, der die reelle Achse eng umläuft. Innerhalb des umlaufenen Gebietes hat der Integrand (unendlich viele) Polstellen 1. Ordnung genau bei den Nullstellen der $\sin \pi n$ -Funktion, die gerade bei den ganzzahligen Werten der Variablen n liegen. Die Funktion $P(in)$ hat in der Nähe der reellen Achse keine Nullstellen, da $P(x)$ keine Nullstellen in der Nähe der imaginären Achse hat.

Zum Residuum bei ganzzahligen Werten der Variablen n : Der Integrand ist vom Typ $p(n)/q(n)$ mit $q(n) = \sin \pi n$. Diese Funktion ist 0 bei ganzzahligen Werten n und hat Ableitung

$$q'(n) = \pi \cos \pi n = (-1)^n \pi. \quad (2.29)$$

Dies beweist die obige Identität.



Genauereres zu den Nullstellen von $P(x)$

$$P(x) = m(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{mit } x_{1/2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{C}{m}}, \quad (2.30)$$

wobei in der Abbildung der Fall $r > 0$, aber klein gegen $C > 0$ behandelt wurde.

Wir fügen “wieder” große Halbkreisbögen hinzu und schließen den oberhalb (unterhalb) der reellen Achse verlaufenden Weg in der oberen (unteren) Halbebene. Die beiden Halbkreisbögen tragen selbst 0 zum Integral bei: Der Integrand verschwindet exponentiell gegen 0, wenn der Imaginärteil gegen $\pm\infty$ geht und $|t| < \pi$ ist (für $|t| = \pi$ ist der Abfall immer noch wie $\mathcal{O}(1/n^2)$). Wir haben es nun mit zwei geschlossenen Konturintegralen zu tun. Das Integral über \mathcal{C}_- ist 0, da der Integrand im Inneren holomorph ist: die Polstellen befinden sich auf der reellen Achse und bei $-ix_1$ sowie $-ix_2$ in der oberen Halbebene. Dort liefert das Integral (Minuszeichen wegen

Umlauf im Uhrzeigersinn = negativer mathematischer Sinn):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{e^{int}}{P(in)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\pi}{\sin \pi n} \frac{e^{int}}{P(in)} dn \quad (2.31a)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) \sum_{j=1}^2 \frac{\pi}{\sin \pi(-ix_j)} \cdot \frac{e^{x_j t}}{iP'(x_j)} = - \sum_{j=1}^2 \frac{\pi}{\sinh \pi x_j} \cdot \frac{e^{x_j t}}{P'(x_j)} \quad (2.31b)$$

$$= - \left(\frac{\pi}{\sinh \pi x_1} \cdot \frac{e^{x_1 t}}{m(x_1 - x_2)} + \frac{\pi}{\sinh \pi x_2} \cdot \frac{e^{x_2 t}}{m(x_2 - x_1)} \right) \quad (2.31c)$$

$$= - \frac{\pi}{m(x_2 - x_1)} \left[\frac{e^{x_2 t}}{\sinh \pi x_2} - \frac{e^{x_1 t}}{\sinh \pi x_1} \right] \quad (2.31d)$$

Achtung: Oben stammte t aus $[-\pi, \pi]$, wir legen nun als Definitionsbereich der Funktion $k(t)$ zu Grunde $t \in [0, 2\pi]$ und setzen in obige Formel $t - \pi \in [-\pi, \pi]$ ein (legitim) und erhalten

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \frac{e^{in(t-\pi)}}{P(in)} = - \frac{1}{2m(x_2 - x_1)} \left[\frac{e^{x_2(t-\pi)}}{\sinh \pi x_2} - \frac{e^{x_1(t-\pi)}}{\sinh \pi x_1} \right], \quad \text{für } t \in [0, 2\pi]. \quad (2.32)$$

Bemerkung: Es gilt für $x \neq 0, 2\pi$

$$P \left(\frac{d}{dt} \right) k(t) = P(x_1) \cdot (\dots) + P(x_2) \cdot (\dots) = 0 + 0 = 0, \quad (2.33)$$

da x_1 und x_2 nun einmal die Nullstellen von $P(x)$ sind. Ferner ist $k(t)$ bei $t = 0$ und 2π stetig und hat einen Sprung in der ersten Ableitung

$$k'(2\pi+) - k'(2\pi-) = k'(0+) - k'(2\pi-) = \frac{1}{2m(x_2 - x_1)} \left[x_2 \frac{e^{\pi x_2} - e^{-\pi x_2}}{\sinh \pi x_2} - x_1 \frac{e^{\pi x_1} - e^{-\pi x_1}}{\sinh \pi x_1} \right] \quad (2.34a)$$

$$= \frac{1}{2m(x_2 - x_1)} [x_2 \cdot 2 - x_1 \cdot 2] = \frac{1}{m}. \quad (2.34b)$$

Damit ist $k(t)$ eine Greensche Funktion der DGL, d.h.

$$P \left(\frac{d}{dt} \right) k(t) = \delta_{2\pi}(t), \quad (2.35)$$

wobei $\delta_{2\pi}(t)$ eine Summe aus δ -Funktionszacken im Abstand von 2π ist.

Bemerkung: Die allgemeine Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators mit periodischer äußerer Kraft (f ist die oben konstruierte spezielle Lösung) ist:

$$f(t) + C_1 \cdot e^{x_1 t} + C_2 \cdot e^{x_2 t}. \quad (2.36)$$

Theorem 2.2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig und 2π -periodisch (plus Zusatzeigenschaften, hier: stückweise stetig differenzierbar). Es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_k e^{ikx} = f(x), \quad \text{wobei } \tilde{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky} f(y) dy. \quad (2.37)$$

Beweis. Die Reihe ist Grenzwert einer Folge:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=-n}^n \tilde{f}_k e^{ikx}}_{=: s_n(x)}, \quad (2.38)$$

wobei wir $s_n(x)$ als Faltungsintegral schreiben können

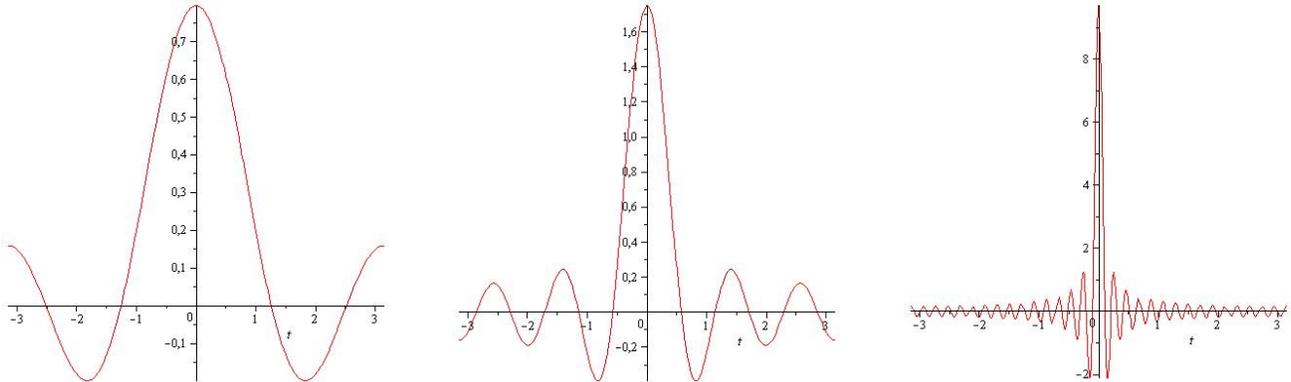
$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)}}_{=: D_n(x-y)} f(y) dy \quad (2.39a)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy, \quad (2.39b)$$

wobei die innere Summe eine endliche geometrische Reihe ist und explizit ausgeführt werden kann

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t}, \quad \text{sog. "Dirichlet - Kern"} \quad (2.40)$$

Plots für $n = 2, 5, 30$:



Erzeugt mit Maple

```
Dk:=proc(n,t) options operator, arrow; (1/2)*sin((n+1/2)*t)/(Pi*sin((1/2)*t))
end proc
with(plots): plot(Dk(2,t), t=-Pi..Pi)
```

Mit Eigenschaften: gerade Funktion, 2π -periodisch, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$, "lokal".

Wir führen die Rechnung nach Variablensubstitution $y \rightarrow x - y$ fort

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) \underbrace{f(x-y)}_{=: f(x-y)-f(x)+f(x)} dy = f(x) + \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) \underbrace{[f(x-y) - f(x)]}_{=: g(y)} dy, \quad (2.41)$$

wobei die Funktion g stetig ist mit $g(0) = 0$. Daher ist es nur natürlich zu erwarten, daß das verbleibende Integral wegen der Lokalitätseigenschaft von D_n mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, was die Behauptung beweisen würde.

Wir wollen die Aussage für stückweis stetig differenzierbare Funktionen zeigen. Dann ist auch g differenzierbar und

$$\tilde{g}(y) := \frac{g(y)}{\sin y/2}, \quad \text{für } y \neq 0 \text{ differenzierbar, bei } y = 0 \text{ stetig,} \quad (2.42)$$

oder im ungünstigen Falle zumindest mit wohldefiniertem links- und rechtseitigem Grenzwert $\tilde{g}(0\pm)$. Wir finden u.a. mittels partieller Integration

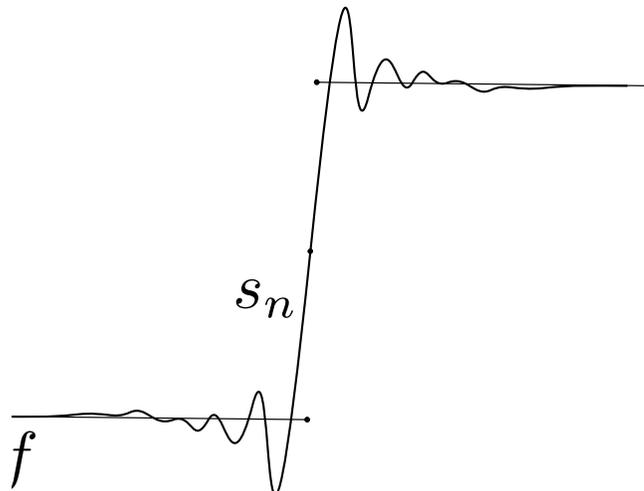
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)g(y)dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(n + \frac{1}{2})y \cdot \underbrace{\frac{g(y)}{\sin y/2}}_{=\tilde{g}(y)} \quad (2.43a)$$

$$= -\frac{\cos(n + \frac{1}{2})y}{2\pi(n + \frac{1}{2})} \tilde{g}(y) \Big|_{0^+}^{2\pi^-} + \frac{1}{2\pi(n + \frac{1}{2})} \int_{0^+}^{2\pi^-} [\cos(n + \frac{1}{2})y] \tilde{g}'(y)dy. \quad (2.43b)$$

Der erste Term ist 0, außer wenn die links- und rechtseitigen Grenzwerte bei 0 verschieden sind, dann aber ist das Ergebnis im Limes $n \rightarrow \infty$ null. Der zweite Term liefert im Limes $n \rightarrow \infty$ auch null, da das Integral für all n beschränkt ist. \square

Bemerkung: Konvergenzaspekte nicht einfach:

- nicht alle (nur) stetigen Funktionen werden durch ihre Fourierreihe dargestellt
- häufig Konvergenz nur bis auf Nullmengen
- für hinreichend “wohltemperierte” Funktionen (“Stetigkeit+”) auch gleichmäßige Konvergenz
- nur stückweise gleichmäßige Konvergenz liegt bei Funktionen mit Sprung vor: Gibbsches Phänomen



Im Detail: sei f überall stetig (bzw. glatt) bis auf Stelle x_0 mit verschiedenen links- und rechtsseitigen Grenzwerten $f(x_0\pm)$.

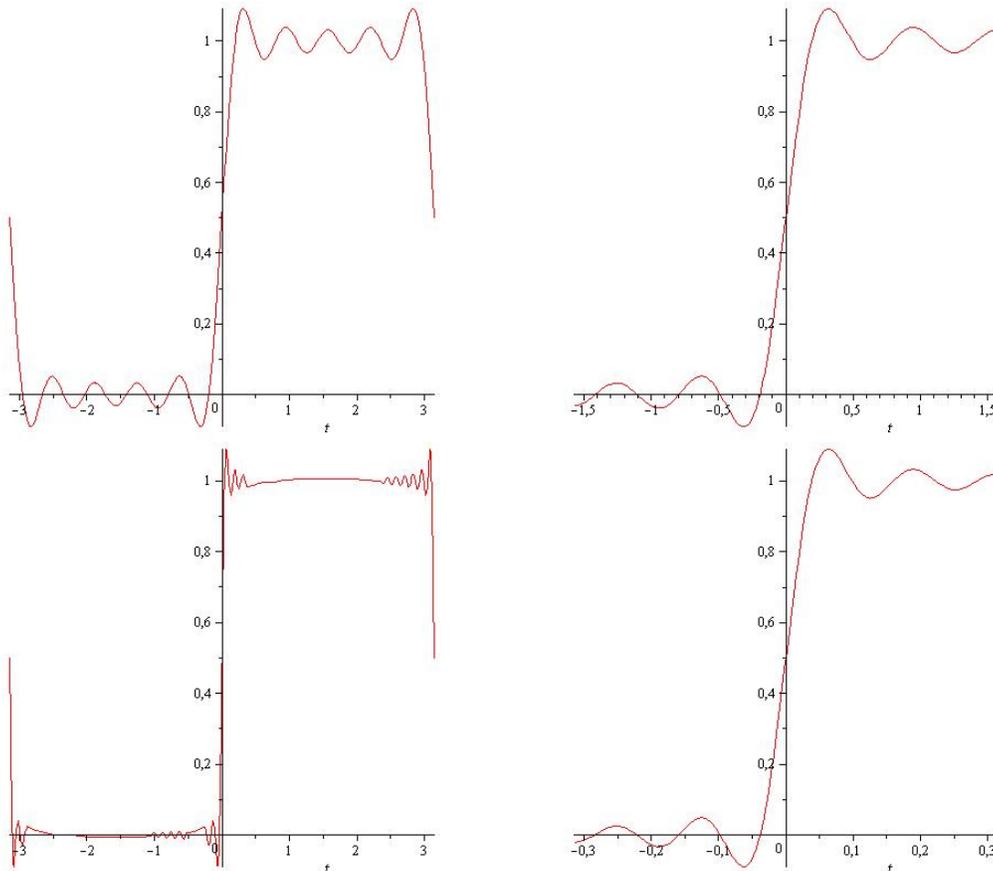
(i) Fourierreihe konvergiert bei x_0 gegen das arithmetische Mittel $f_m(x_0) := \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$.

(ii) Überschießen:

$$s_n \left(x_0 \pm \frac{2\pi}{2n+1} \right) = f_m(x_0) \pm \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{\pi} \cdot \underbrace{\int_0^\pi dt \frac{\sin t}{t}}_{=\frac{\pi}{2} \cdot 1.17897...} \quad (2.44a)$$

$$= f_m(x_0) \pm \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} \cdot 1.17897... \quad (2.44b)$$

Hier Graphen der Faltung von D_n für $n = 10$ und 50 mit einer stückweise konstanten Funktion (welcher, und welcher Plot zeigt was?):



Erzeugt mit Maple

Digits:=20:

```
Falt:=proc(n,t) options operator, arrow; integrate(Dk(n,t-s),s=0..Pi) end
proc:
plot(Falt(10,t), t=-Pi..Pi); plot(Falt(10,t), t=-5*Pi*(1/10)..5*Pi*(1/10))
plot(Falt(50,t), t=-Pi..Pi); plot(Falt(50,t), t=-5*Pi*(1/50)..5*Pi*(1/50))
```

2.3 Fourier-Integrale

Wir betrachten Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die über ganz \mathbb{R} betragstintegrabel sind, d.h. $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ existiere. Ein derartiger Raum wird $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ genannt. Auf diesem Raum können die Fourier-Transformationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} definiert werden durch:

$$\mathcal{F}[f](k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x), \quad (2.45a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) := \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} g(k). \quad (2.45b)$$

Beachte, daß im wesentlichen ein Vorzeichenunterschied in der Exponentialfunktion vorliegt: die Benutzung der Symbole x und k für die Argumente ist willkürlich und entspricht einfach den Anwendungen in der Physik. Der Vorfaktor $1/2\pi$ kann auch symmetrisch auf beide Transformationen verteilt werden mit je einem Faktor $1/(2\pi)^{\frac{1}{2}}$. Wir können in analoger Weise auch Funktionen auf höherdimensionalen Vektorräumen \mathbb{R}^n betrachten mit entsprechenden Verallgemeinerungen (kx wird das Skalarprodukt zweier Vektoren k und x), es taucht ein Faktor $1/(2\pi)^n$ oder zwei Faktoren $1/(2\pi)^{\frac{n}{2}}$ auf.

Unter gewissen Voraussetzungen an die zu transformierenden Funktionen sind die Operationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} invers zueinander, d.h.

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = id, \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id. \quad (2.46)$$

(Achtung: in unendlich-dimensionalen Räumen impliziert die eine Eigenschaft nicht notwendig die andere.) Die Bedingung für diese Eigenschaft ist für Funktionen f aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ erfüllt, die auch quadratintegrabel sind, wobei $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}[f] = f$ bzw. $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[f] = f$ auf "fast ganz \mathbb{R} " erfüllt ist, also \mathbb{R} mit evtl. Ausnahme einer Nullmenge.

Eine übliche Kurznotation ist $\tilde{f} := \mathcal{F}[f]$ also

$$\tilde{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x), \quad (2.47a)$$

$$f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k). \quad (2.47b)$$

Beispiel(e) 2.2. (i) Lorentzkurve $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}$

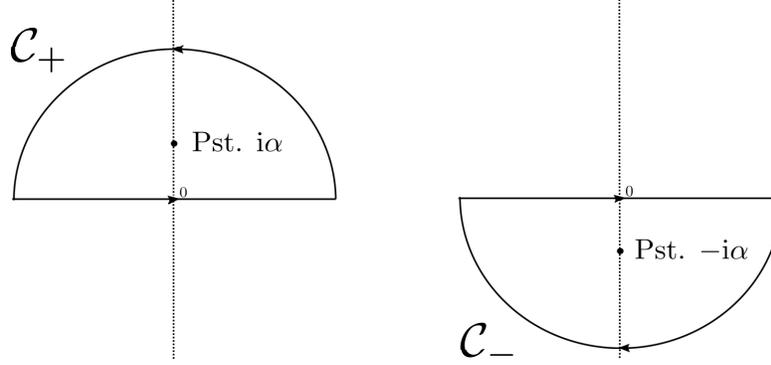
Diese Funktion hat Polstellen bei $x = \pm i\alpha$ mit Residuen

$$\text{res}_{\pm i\alpha} f = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{2x} \Big|_{x=\pm i\alpha} = \pm \frac{1}{2\pi i}. \quad (2.48)$$

Wir wollen berechnen

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}, \quad (2.49)$$

was wir mit den Mitteln der Funktionentheorie bewerkstelligen wollen. Für Argumente $k > 0$ ($k < 0$) können wir den x -Weg nach unten (oben) schließen, denn dann besitzt $-ikx$ einen Realteil, der gegen $-\infty$ geht.



Rechnung

$$k > 0 : \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_-} dx \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) e^{-\alpha k} = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha k}, \quad (2.50a)$$

$$k < 0 : \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_+} dx \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} (+2\pi i) \left(\frac{1}{2\pi i} \right) e^{\alpha k} = \frac{1}{2\pi} e^{\alpha k}, \quad (2.50b)$$

was für beide Fälle zusammengefaßt werden kann als

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} e^{-\alpha|k|}. \quad (2.51)$$

Die Rücktransformation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^0 dk e^{ikx} \frac{e^{\alpha k}}{2\pi} + \int_0^{\infty} dk e^{ikx} \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \quad (2.52a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk e^{(\alpha+ix)k} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-(\alpha-ix)k} \quad (2.52b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(\alpha+ix)k}}{\alpha+ix} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-(\alpha-ix)k}}{-(\alpha-ix)} \Big|_0^{\infty} \quad (2.52c)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha+ix} + \frac{1}{\alpha-ix} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} \quad (2.52d)$$

was gleich der Ausgangsfunktion ist!

Beispiel(e) 2.3. (ii) Gaußfunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$

Wir berechnen

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2\sigma} - ikx}}_{= e^{-\frac{(x+i\sigma k)^2}{2\sigma} - \frac{\sigma}{2}k^2}} \quad (2.53a)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sigma}{2}k^2}}{2\pi\sqrt{2\pi\sigma}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x+i\sigma k)^2}{2\sigma}}}_{\stackrel{\text{Cauchy}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}} \quad (2.53b)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sigma}{2}k^2}}{2\pi\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} = \frac{e^{-\frac{\sigma}{2}k^2}}{2\pi\sqrt{2\pi\sigma}} \sqrt{2\sigma\pi} \quad (2.53c)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sigma}{2}k^2}}{2\pi}, \quad \text{ebenfalls Gaußfunktion.} \quad (2.53d)$$

In der Zeile (2.53b) wurde der Integrationsweg $\mathbb{R} + i\sigma k$ durch \mathbb{R} ersetzt. Dies ist nach Cauchy erlaubt: die Differenz der beiden Integrale ist ein Integral über eine geschlossene Kontur, innerhalb derer der Integrand holomorph ist und bei $\pm\infty$ gegen null geht. (Daher können die senkrechten Stücke der geschlossenen Kontur wahlweise hinzugenommen oder fallengelassen werden.)

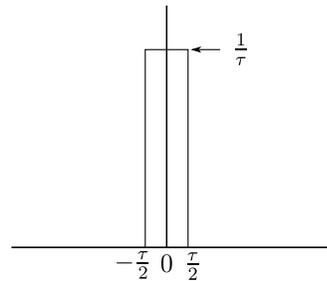
Zusammenfassung: Die Wirkung von \mathcal{F} ist: σ im Exponenten durch $(\tilde{\sigma} =)1/\sigma$ ersetzt, sowie multiplikativer Faktor $\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi\sigma}$.

Rücktransformation: Die Wirkung von \mathcal{F}^{-1} ist: σ im Exponenten durch $1/\sigma$ ersetzen, sowie multiplikativer Faktor $1 \cdot \sqrt{2\pi/\sigma}$, liefert

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} = f(x), \quad \text{wie behauptet.} \quad (2.54)$$

Beispiel(e) 2.4.

(iii) *Kastenfunktion: siehe Übungen*



2.4 Allgemeine Rechenregeln

Die Fouriertransformation ist linear (c_1, c_2 seien Konstante)

$$\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F} f_1 + c_2 \mathcal{F} f_2, \quad (2.55)$$

wobei wir die eckigen Klammern nach \mathcal{F} fallengelassen haben, wo kein Mißverständnis möglich ist.

“Skalieren” des Arguments:

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](k) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}[f(x)]\left(\frac{k}{\alpha}\right), \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{f(\alpha x)} \Big|_k = \frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right). \quad (2.56)$$

Beweis.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-i\frac{k}{\alpha}\alpha x} \frac{d\alpha x}{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{k}{\alpha}y} \frac{dy}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right), \quad (2.57)$$

wobei wir zum Schluß die Integrationsvariablensubstitution $y = \alpha x$ durchgeführt haben, die den Integrationsbereich \mathbb{R} invariant läßt. \square

Translation des Arguments (beliebig entlang der reellen Achse oder auch im gesamten Holomorphiebereich)

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](k) = e^{-ikx_0} \mathcal{F}[f(x)](k), \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{f(x - x_0)} \Big|_k = e^{-ikx_0} \tilde{f}(k). \quad (2.58)$$

Beweis.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) \underbrace{e^{-ikx}}_{e^{-ik(x-x_0)} e^{-ikx_0}} dx \stackrel{\text{(Cauchy)}}{=} e^{-ikx_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = e^{-ikx_0} \tilde{f}(k). \quad (2.59)$$

\square

Ableitung f' / Stammfunktion F von f

$$\mathcal{F}[f'](k) = ik \mathcal{F}[f](k), \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}'(k) = ik \tilde{f}(k), \quad (2.60a)$$

$$\mathcal{F}[F](k) = \frac{1}{ik} \mathcal{F}[f](k), \quad \text{bzw.} \quad \tilde{F}(k) = \frac{1}{ik} \tilde{f}(k). \quad (2.60b)$$

$$(2.60c)$$

Beweis.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ik \tilde{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (2.61)$$

wobei der Vorfaktor der Exponentialfunktion im Integranden die Fouriertransformierte sein muß. \square

Faltung / Konvolution

Für zwei Funktionen (mit geeigneten Asymptotiken bzw. Integrierbarkeitseigenschaften) f, g definieren wir

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x - y) g(y) \quad \left(= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x - y) \right), \quad (2.62)$$

mit der Eigenschaft $f * g = g * f$. Für die Fouriertransformierte gilt

$$\mathcal{F}[f * g] = 2\pi \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g], \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{f * g} = 2\pi \tilde{f} \cdot \tilde{g}, \quad (\text{Faltungssatz, Fouriertheorem}), \quad (2.63)$$

wobei der auftretende Faktor 2π auf der rechten Seite etwas unästhetisch ist und durch eine andere Definition der Konvolution oder auch der Fouriertransformation verschluckt werden kann. Wir halten uns hier an einen etablierten Standard.

Beweis.

$$\widetilde{f * g}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (f * g)(x) e^{-ikx} \quad (2.64a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y) g(y) e^{-ik(x-y)} e^{-iky} \quad (2.64b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x-y) e^{-ik(x-y)}}_{= \tilde{f}(k)} g(y) e^{-iky} \quad (2.64c)$$

$$= \tilde{f}(k) \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) e^{-iky} = \tilde{f}(k) 2\pi \tilde{g}(k). \quad (2.64d)$$

□

Anwendungen: Wir lösen

- Differentialgleichungen mit Inhomogenitäten,
- Funktionalgleichungen,
- Berechnung von (mehrfachen) Faltungen: Zentraler Grenzwertsatz.

Beispiel(e) 2.5. (i) Der gedämpfte harmonische Oszillator mit externer Kraft (nichtperiodisch, z.B. einzelner Kraftstoß). Wir nennen hier – anders als in der Physik sonst üblich – die Zeitvariable x , die Auslenkung $f(x)$, die Kraft $g(x)$

$$m f''(x) + r f'(x) + C f(x) = g(x). \quad (2.65)$$

Fouriertransformation beider Seiten

$$\underbrace{m (ik)^2 \tilde{f}(k) + r ik \tilde{f}(k) + C \tilde{f}(k)}_{(m (ik)^2 + r ik + C) \tilde{f}(k)} = \tilde{g}(k) \quad (2.66)$$

Das Ergebnis schreiben wir mit demselben Polynom wie in (2.14)

$$\tilde{f}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{P(ik)}, \quad \text{wobei } P(x) := mx^2 + rx + C. \quad (2.67)$$

Die Rücktransformation des Produktes liefert nach Fouriertheorem eine Konvolution von $g(x)$ mit der Rücktransformation von $\frac{1}{P(ik)}$ geteilt durch 2π

$$f = k * g, \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) g(y) dy, \quad (2.68)$$

wobei

$$k(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{aus Fouriertheorem}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{P(ik)} e^{ikx}}_{\text{Rücktransformation}}. \quad (2.69)$$

Die Rechnung bis hier war viel einfacher als im periodischen Fall. Die Auswertung des Integrals erfolgt teilweise ähnlich, aber teilweise auch sehr verschieden von der im periodischen Fall. Zunächst beobachten wir, daß die Zeitvariable (hier x genannt) beliebige reelle Werte annehmen kann. Im hier behandelten Fall können wir wieder den Integrationsweg schließen, müssen aber im Falle $x > 0$ ($x < 0$) den oberen (unteren) Halbkreisbogen wählen. Die Polstellen des Integranden liegen in der oberen Halbebene bei $-ix_{1/2}$, wobei $x_{1/2}$ die Nullstellen von $P(x)$ sind, siehe (2.30). Wir behandeln den Fall $x < 0$ vorab: Da in der unteren Halbebene keine Polstellen des Integranden vorliegen, ist das Integral 0: $k(x) = 0$.

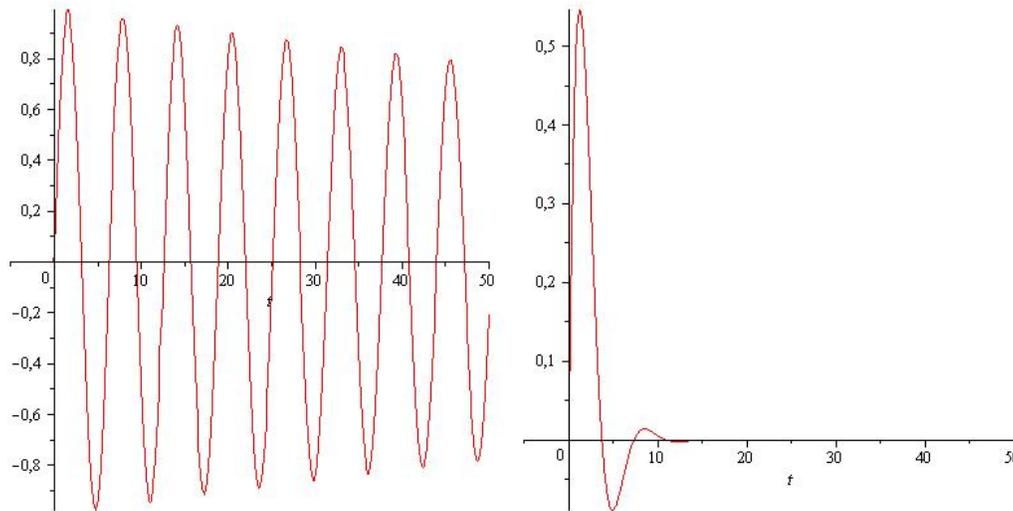
Nun $x > 0$. Wir ergänzen den Integrationsweg zu einem in der oberen Halbebene geschlossenen Weg \mathcal{C}_+ , aber im mathematisch positiven Sinn durchlaufen

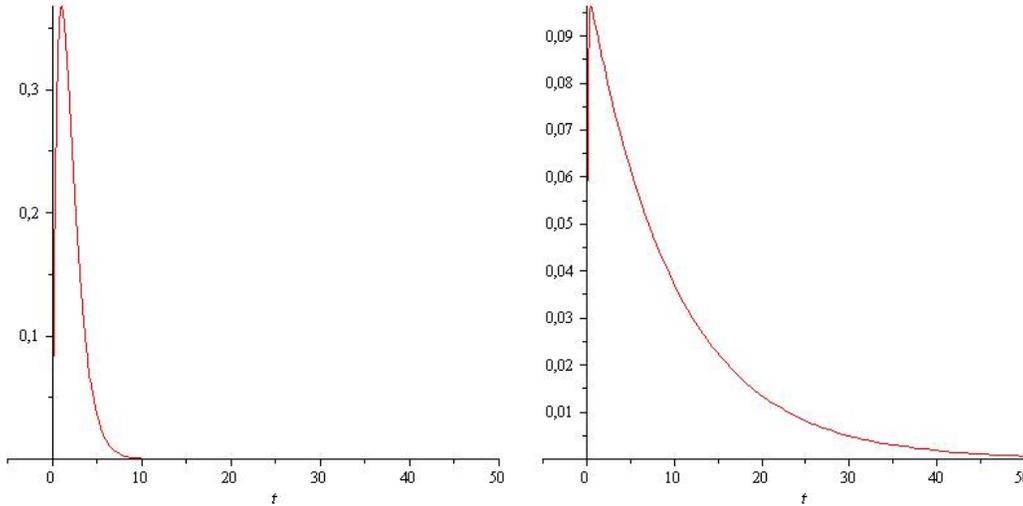
$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_+} dk \frac{1}{P(ik)} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} (2\pi i) \sum_{j=1}^2 \frac{e^{x_j x}}{iP'(x_j)} \quad (2.70a)$$

$$= \frac{e^{x_1 x}}{m(x_1 - x_2)} + \frac{e^{x_2 x}}{m(x_2 - x_1)} = \frac{e^{x_1 x} - e^{x_2 x}}{m(x_1 - x_2)} \quad (2.70b)$$

$$= \frac{\sin \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \cdot x}{m \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} e^{-\frac{r}{2m} x}. \quad (2.70c)$$

Es folgen Plots des Ergebnisses von $k(x)$ mit $x \in [-5, 50]$ für die Parametersätze $m = C = 1$ und $r = 0.01, 1, 2, 10$. Die Funktion k beschreibt die Auslenkung des Oszillators nach einem Kraftstoß. Man beachte, daß für kurze Zeiten nach 0 Ähnlichkeiten mit den Kurven im periodischen Fall bestehen.





Erzeugt mit Maple

```
with(plots): Nst:=solve(m*x^2*r*x+C=0,x):x[1]:=Nst[1]; x[2]:=Nst[2]:
k:=proc(t) if t<=0 then result:=0 else result:=
(exp(x[2]*t)-exp(x[1]*t))/(m*(x[2]-x[1])) end if; return Re(result) end proc
m:=1; r:=1.0; C:=1:
plot(('k')(t),t=-5..50);
```

2.5 Anwendungen

2.5.1 Zentraler Grenzwertsatz

Wir setzen Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung/Stochastik voraus. Wir betrachten

- Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion ρ (oder auch spezifischer: ρ_X),
- Bedeutung: Wahrscheinlichkeit $\langle X \in [x, x + dx] \rangle = \rho(x)dx$,
- Erwartungswert: $\langle X \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx =: m$, (spezifischer m_X , “Mittelwert”),
- Schwankungsquadrat: $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle =: \sigma^2$, mit $\langle X^2 \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)dx$,
 σ (spezifischer σ_X) heißt “Standardabweichung” von X .
- Die “Momente” der Verteilung $\langle X^n \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x^n\rho(x)dx$,
- Erzeugende Funktion der Momente: Fouriertransformierte $2\pi\tilde{\rho}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\rho(x)$,
denn

$$\left(\frac{d}{dk}\right)^n (2\pi\tilde{\rho})\Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (-ix)^n\rho(x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n\rho(x), \quad (2.71)$$

sofern existent. Insbesondere gilt

$$2\pi\tilde{\rho}(0) = 1, \quad 2\pi\tilde{\rho}'(0) = -i\langle X \rangle, \quad 2\pi\tilde{\rho}''(0) = -\langle X^2 \rangle. \quad (2.72)$$

- Bequemer noch ist folgende “Erzeugende Funktion” $\hat{\rho}(k) := \log[2\pi\tilde{\rho}(k)]$, da

$$\hat{\rho}(0) = 0, \quad \hat{\rho}'(0) = \frac{\tilde{\rho}'(0)}{\tilde{\rho}(0)} = -i\langle X \rangle, \quad \hat{\rho}''(0) = \frac{\tilde{\rho}''(0)}{\tilde{\rho}(0)} - \left(\frac{\tilde{\rho}'(0)}{\tilde{\rho}(0)} \right)^2 = -(\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2). \quad (2.73)$$

Die Taylorentwicklung von $\hat{\rho}(k)$ um 0 lautet

$$\hat{\rho}(k) = 0 - i\langle X \rangle k - \frac{1}{2} (\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2) k^2 + \mathcal{O}(k^3) \quad (2.74)$$

Bemerkung:

- Die “Normalverteilung” bzw. Gaußverteilung hat eine Taylorentwicklung von $\hat{\rho}(k)$, die nach dem k^2 -Term abbricht ($\hat{\rho}(k) = -imk - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2$),
- Die Lorentzverteilung besitzt ein $\hat{\rho}(k)$, das nur stetig ist, aber bei $k = 0$ nicht differenzierbar ist ($\hat{\rho}(k) = -\alpha|k|$).

Warum trägt die Normalverteilung ihren Namen?

In “der Natur” sind viele “Zufallsvariable” Meßgrößen, die aus Summen unabhängiger Messungen zusammengesetzt sind.

Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Verteilungen ρ_{X_1}, ρ_{X_2}

Die Zufallsvariable $X := X_1 + X_2$ hat die Verteilung $\rho_{X_1+X_2}$ definiert durch

$$\rho_{X_1+X_2} \Delta x = \text{Wahrscheinlichkeit } (X_1 + X_2 \in [x, x + \Delta x]) \quad (2.75a)$$

$$= \int_{x_1+x_2 \in [x, x+\Delta x]} dx_1 dx_2 \rho_{X_1}(x_1) \rho_{X_2}(x_2) \quad (2.75b)$$

$$\text{Substitution } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (2.75c)$$

$$= \int_{\substack{\tilde{x} \in [x, x + \Delta x] \\ \tilde{y} \text{ beliebig}}} d\tilde{x} d\tilde{y} \rho_{X_1}(\tilde{x} - \tilde{y}) \rho_{X_2}(\tilde{y}) \quad (2.75d)$$

$$= \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \rho_{X_1}(x - \tilde{y}) \rho_{X_2}(\tilde{y}) + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (2.75e)$$

Also ist ρ_X mit $X := X_1 + X_2$ durch die Konvolution von ρ_{X_1} und ρ_{X_2} gegeben

$$\rho_{X_1+X_2} = \rho_{X_1} * \rho_{X_2}. \quad (2.76)$$

Dies kann direkt auf eine Summe von N -vielen unabhängigen Zufallsvariablen X_j verallgemeinert werden

$$X := \sum_{j=1}^N X_j \Rightarrow \rho_X = \rho_{X_1} * \rho_{X_2} * \dots * \rho_{X_N}. \quad (2.77)$$

Nach dem Faltungssatz bzw. Fouriertheorem (2.63) ist die erzeugende Funktion $2\pi\tilde{\rho}$ multiplikativ

$$2\pi\tilde{\rho}_X(k) = \prod_{j=1}^N 2\pi\tilde{\rho}_{X_j}(k). \quad (2.78)$$

Die erzeugende Funktion $\hat{\rho}$ ist sodann additiv

$$\hat{\rho}_X(k) = \log[2\pi\tilde{\rho}_X(k)] = \sum_{j=1}^N \log[2\pi\tilde{\rho}_{X_j}(k)] = \sum_{j=1}^N \hat{\rho}_{X_j}(k). \quad (2.79)$$

Wir nehmen die 1. und die 2. Ableitung von $\hat{\rho}_X(k)$ bei $k = 0$ und erhalten für den Mittelwert m und das Schwankungsquadrat σ^2 von $X = \sum X_j$

$$m = \sum_{j=1}^N m_j, \quad (2.80a)$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N \sigma_j^2, \quad (2.80b)$$

wobei wir kurz m_j und σ_j für m_{X_j} und σ_{X_j} geschrieben haben.

Bemerkung:

- Die Summe normalverteilter Variablen ist normalverteilt

$$\hat{\rho}_{X_1+X_2}(k) = -im_1k - \frac{1}{2}\sigma_1^2k^2 - im_2k - \frac{1}{2}\sigma_2^2k^2 = -i(m_1 + m_2)k - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)k^2, \quad (2.81)$$

- Die Summe lorentzverteilter Variablen ist lorentzverteilt

$$\hat{\rho}_{X_1+X_2}(k) = -\alpha_1|k| - \alpha_2|k| = -(\alpha_1 + \alpha_2)|k|. \quad (2.82)$$

Skalierung einer Zufallsvariablen und additive Konstante

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion ρ_X . Wir suchen die Verteilungsfunktion ρ_{aX} der Zufallsvariablen $a \cdot X$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$.

Nach Definition muß gelten

$$\rho_{aX}(x)dx = \text{Wahrscheinlichkeit } (aX \in [x, x + dx]) \quad (2.83a)$$

$$= \text{Wahrscheinlichkeit } \left(X \in \left[\frac{x}{a}, \frac{x}{a} + \frac{dx}{a} \right] \right) = \rho_X \left(\frac{x}{a} \right) \frac{dx}{a}, \quad (2.83b)$$

woraus folgt

$$\rho_{aX}(x) = \frac{1}{a} \rho_X \left(\frac{x}{a} \right), \quad (2.84)$$

und für die Fouriertransformierte und die erzeugende Funktion gilt

$$\tilde{\rho}_{aX}(k) = \tilde{\rho}_X(ak), \quad \hat{\rho}_{aX}(k) = \hat{\rho}_X(ak). \quad (2.85)$$

Erwartungswert und Schwankungsquadrat von aX sind somit a bzw. a^2 mal Erwartungswert und Schwankungsquadrat von X .

Addition einer Konstanten: Analog gilt für reelles m

$$\rho_{X-m}(x) = \rho_X(x+m), \quad (2.86)$$

und

$$\tilde{\rho}_{X-m}(k) = e^{imk} \tilde{\rho}_X(k), \quad \hat{\rho}_{X-m}(k) = \hat{\rho}_X(k) + imk. \quad (2.87)$$

Der Erwartungswert von $X - m$ ist gleich dem Erwartungswert von X minus m . Die Schwankungsquadrate sind gleich.

Theorem 2.3. (*Zentraler Grenzwertsatz*)

Summen N -vieler unabhängiger Zufallsvariablen haben unter "recht allgemeinen Voraussetzungen" eine Verteilung, die im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ gegen eine Normalverteilung konvergiert.

Unter "recht allgemeinen Voraussetzungen" kann beispielsweise die Entwickelbarkeit der Funktionen $\hat{\rho}_{X_j}(k)$ um $k = 0$ verstanden werden o.ä. (Jedenfalls bleiben die lorentzverteilten Zufallsvariablen außen vor.)

Beweis. Vorbereitung: Wir nehmen der Einfachheit halber $\rho_{X_1} = \rho_{X_2} = \dots = \rho_{X_N} =: \rho$ an mit Erwartungswert m und Schwankungsquadrat σ^2 . Wir nutzen ferner

$$\hat{\rho}(k) = -imk - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + \mathcal{O}(k^3). \quad (2.88)$$

Das Objekt mit gutem Grenzwertverhalten (auch in allgemeineren) Situationen ist

$$X := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{j=1}^N (X_j - \langle X_j \rangle), \quad (2.89)$$

denn X hat Erwartungswert 0 und Schwankungsquadrat (siehe Skalierungsregel mit $a = 1/\sqrt{N}$) gleich $a^2 \cdot N\sigma^2 = \sigma^2$. Dies gilt für beliebiges N . Im Limes $N \rightarrow \infty$ zeigt die erzeugende Funktion $\hat{\rho}_X$ ein erstaunliches, aber transparentes Verhalten

$$\hat{\rho}_X(k) = \hat{\rho}_{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum (X_j - \langle X_j \rangle)}(k) = \hat{\rho}_{\sum (X_j - \langle X_j \rangle)}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}k\right) \quad (2.90a)$$

$$= \sum_{j=1}^N \hat{\rho}_{X_j - \langle X_j \rangle}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}k\right) = N \left[\hat{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}k\right) + im \frac{1}{\sqrt{N}}k \right] \quad (2.90b)$$

$$= 0 + 0 \cdot k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + N \cdot \mathcal{O}\left(\left(k/\sqrt{N}\right)^3\right) \quad (2.90c)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\sigma^2 k^2, \quad \text{für } N \rightarrow \infty. \quad (2.90d)$$

Dies ist die erzeugende Funktion der Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Schwankungsquadrat σ^2 . \square

2.5.2 Funktionalgleichungen

Nehmen wir an, man gibt Ihnen die Funktionalgleichung der Γ -Funktion

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (2.91)$$

und Sie haben vergessen, daß die Γ -Funktion bekannt ist oder Sie wollen die Integral- und Produkt-Formeln nicht benutzen. An Hand der Funktionalgleichung sehen Sie, daß $\Gamma(z)$ entlang der (positiven) reellen Achse stark anwachsen muß, aber nicht unbedingt so in imaginärer Richtung.

Sie stellen sich die Aufgabe, $\Gamma(z)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ zu berechnen, z.B. für $z = a + ix$ mit $a > 0$ und x beliebig reell.

Definiere

$$g(x) := \log \Gamma(a + ix), \quad (2.92)$$

das die Funktionalgleichung

$$g(x - i) = \log(a + ix) + g(x), \quad (2.93)$$

erfüllt. Diese Funktionalgleichung verknüpft die Funktion g an Argumenten, die sich durch eine Konstante unterscheiden, ist im weiteren linear etc. Es bietet sich zur Lösung die Fouriertransformation an, wie gleich klar wird. Da aber wegen des asymptotischen Verhaltens $\log(a + ix)$ nicht fouriertransformierbar ist, und damit auch nicht $g(x)$, nehmen wir noch die Ableitung nach x und erhalten für $f(x) := g'(x)$

$$f(x - i) = \frac{i}{a + ix} + f(x). \quad (2.94)$$

Wir wissen, wenn $\tilde{f}(k)$ die Fouriertransformierte von $f(x)$ ist, dann ist $e^k \tilde{f}(k)$ die Fouriertransformierte von $f(x - i)$, so daß wir finden

$$e^k \tilde{f}(k) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{x - ia} \right] (k) + \tilde{f}(k), \quad (2.95)$$

Zur Berechnung von $\tilde{f}(k)$ brauchen wir nun nur noch die explizite Fouriertransformierte von $1/(x - ia)$

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x - ia} \right] (k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{-ikx}}{x - ia} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_{\pm}} dx \frac{e^{-ikx}}{x - ia}, \quad \text{für } k < (>)0, \quad (2.96)$$

wobei die geschlossenen Wege \mathcal{C}_{\pm} in der oberen bzw. der unteren Halbebene durch einen unendlichen Halbkreisbogen geschlossen sind und im positiven bzw. negativen Umlaufsinn durchlaufen werden. Die Halbkreisbögen tragen nicht bei zum Integral, da für $k < 0$ der Exponent $-ikx$ für $\operatorname{Im}(x) \rightarrow +\infty$ einen gegen $-\infty$ tendierenden Realteil hat. Für $k > 0$ und $\operatorname{Im}(x) \rightarrow -\infty$ ebenso.

Im Detail:

Das Verschwinden des Integranden für gegen unendlich tendierenden Imaginärteil der Integrationsvariablen erfolgt gleichmäßig bzw. unabhängig vom Realteil, da die Exponentialfunktion

faktoriert. Das Argument trifft nicht mehr wörtlich zu bei den “kleinen Stücken des Halbkreises” an der reellen Achse. Man könnte für den hier vorliegenden Fall das Integrationsintervall $[-R, +R]$ nicht mit einem Halbkreisbogen schließen, sondern mit einem Kasten der Gesamtbreite $2R$ und der Höhe \sqrt{R} . Der Kasten hat drei gerade Stücke: einen der Länge $2R$ mit einem Imaginärteil der Größe \sqrt{R} . Da hilft das Argument mit dem gleichmäßigen Verschwinden des Integranden unabhängig vom Realteil der Integrationsvariablen. Dann gibt es die senkrechten Seitenstücke, welche \sqrt{R} hoch sind, wobei der Integrand eine Größe von $const./R$ hat. Das Produkt geht gegen 0, wenn $R \rightarrow \infty$.

Nun wenden wir den Residuensatz bzw. die Cauchy-Integralformel an. Der Integrand ist holomorph auf \mathbb{C} bis auf die isolierte Singularität bei $x = ia$ in der oberen Halbebene. Damit liefert das Konturintegral entlang \mathcal{C}_+ (für den Fall $k < 0$) das Residuum bei ia

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x - ia} \right] (k) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i e^{ka} = i e^{ak}, \quad (k < 0) \quad (2.97)$$

und entlang \mathcal{C}_- (für den Fall $k > 0$) ist das Ergebnis einfach 0. Wir erhalten somit

$$(e^k - 1) \tilde{f}(k) = \begin{cases} i e^{ak}, & k < 0, \\ 0, & k > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(k) = \begin{cases} i \frac{e^{ak}}{e^k - 1}, & k < 0, \\ 0, & k > 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

Die Rücktransformation ist leider nicht konvergent

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 dk i \frac{e^{ak}}{e^k - 1} e^{ikx} \quad \text{nicht integrabel bei } k = 0, \quad (2.99)$$

aber für die Differenz $f(x) - f(0)$ erhalten wir

$$f(x) - f(0) = \int_{-\infty}^0 i \frac{e^{ak}}{e^k - 1} (e^{ikx} - 1) \quad \text{konvergent.} \quad (2.100)$$

Und tatsächlich kann hier $f(x)$ nur bis auf eine Konstante berechnet werden, da wir nur (2.94) benutzt haben. Das Integral $g(x) = f(0) \cdot x + g(0) +$ Stammfunktion der rechten Seite von (2.100) muß aber (2.93) erfüllen. Daraus ergibt sich $f(0)$, aber natürlich nie $g(0)$.

Es zeigt sich für $a = 1$: $f(0) = -\gamma$, wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

2.6 Höherdimensionale Fourierintegrale

Wir betrachten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, die über ganz \mathbb{R}^n betragsintegrabel sind, d.h. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x$ existiere. Ebenso wie im eindimensionalen Fall können die Fourier-Transformationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} auf diesem Raum definiert werden.

Wir benutzen die Kurznotation $\tilde{f} := \mathcal{F}[f]$ also

$$\tilde{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n r e^{-ikr} f(r), \quad (2.101a)$$

$$f(r) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n k e^{ikr} \tilde{f}(k), \quad (2.101b)$$

wobei hier k und r Vektoren sind und kr das Skalarprodukt bezeichnet. Ferner sind $d^n k$ und $d^n r$ die zugehörigen Volumenelemente.

Viele der Rechenregeln im Eindimensionalen gelten hier ebenfalls. Interessanterweise transformieren sich Ableitungsoperatoren ∇ in einfacher Weise. Seien $f(r)$ und $\tilde{f}(k)$ die Fouriertransformierten voneinander, so gilt für Gradient, Divergenz und Rotation (∇ sei immer vektoriell):

$$\nabla f(r) \leftrightarrow ik \tilde{f}(k) \quad (f \text{ skalar}) \quad (2.102a)$$

$$\nabla \cdot f(r) \leftrightarrow ik \cdot \tilde{f}(k) \quad (f \text{ vektoriell}), \quad (2.102b)$$

$$\nabla \times f(r) \leftrightarrow ik \times \tilde{f}(k) \quad (f \text{ vektoriell}). \quad (2.102c)$$

Faltung / Konvolution

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (mit geeigneten Asymptotiken bzw. Integrierbarkeitseigenschaften) definieren wir

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n y f(x-y)g(y) \quad \left(= \int_{\mathbb{R}^n} d^n y f(y)g(x-y) \right), \quad (2.103)$$

mit der Eigenschaft $f * g = g * f$. Für die Fouriertransformierte gilt

$$\mathcal{F}[f * g] = (2\pi)^n \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g], \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{f * g} = (2\pi)^n \tilde{f} \cdot \tilde{g}, \quad (\text{Faltungssatz, Fouriertheorem}), \quad (2.104)$$

2.7 Anwendungen

2.7.1 Coulomb-/Yukawa-Potential

In der Elektrostatik gilt die Poisson-Gleichung (aus $E = -\nabla V$, $\nabla E = 4\pi\rho$)

$$-\Delta V(r) = 4\pi\rho(r), \quad (2.105)$$

wobei r vektoriell sein soll.

Die Poissongleichung gilt in der üblichen Elektrodynamik, in der Photonen masselos sind. Hätten die Photonen eine Masse m , so müßte die Poissongleichung (gemäß Klein-Gordon-Gleichung der relativistischen Quantenmechanik) durch

$$(-\Delta + m^2)V(r) = 4\pi\rho(r), \quad (2.106)$$

ersetzt werden.

Wir wollen diese Gleichung für beliebiges $\rho(r)$ in Form eines Faltungsintegrals lösen. Es seien \tilde{V} und $\tilde{\rho}$ die Fouriertransformierten zu V und ρ . Dann lautet die Fouriertransformierte der Poissongleichung

$$(k^2 + m^2)\tilde{V}(k) = 4\pi\tilde{\rho}(k), \quad (2.107)$$

da $\Delta = \nabla^2 \rightarrow (ik)^2 = -k^2$. Die Lösung für \tilde{V} ist

$$\tilde{V}(k) = \frac{4\pi}{k^2 + m^2} \tilde{\rho}(k). \quad (2.108)$$

Nach Faltungstheorem muß nun gelten

$$V = G * \rho, \quad \text{mit} \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2 + m^2}. \quad (2.109)$$

Wir berechnen nun das Fourierintegral von $\tilde{G}(k)$ und erhalten explizit $G(r)$. Wir benutzen für k Kugelkoordinaten mit an den Vektor r angepaßten Achsen. Achtung: Unterscheide das Skalarprodukt $k \cdot r$ vom Produkt der Beträge kr , nämlich $k \cdot r = kr \cos \theta$:

$$G(r) = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} e^{ik \cdot r}, \quad (2.110a)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty d\phi d\theta \sin \theta dk k^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} e^{ikr \cos \theta}, \quad (2.110b)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_0^\infty dx dk k^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} e^{ikrx}, \quad (2.110c)$$

$$= \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{4\pi}{k^2 + m^2} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}, \quad (2.110d)$$

$$= \frac{1}{2\pi i r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{k^2 + m^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}), \quad (2.110e)$$

wobei wir zuerst über ϕ , dann über $x := \cos \theta$ mit $dx = -\sin \theta d\theta$ integriert, und zum Schluß die Geradheit des Integranden genutzt und das Integral über ganz \mathbb{R} geschrieben haben. Der Integrand ist übrigens auf ganz \mathbb{R} regulär und auf ganz \mathbb{C} holomorph bis auf die beiden Polstellen erster Ordnung $\pm im$. Da $r > 0$ können wir den k -Integrationsweg für den Term mit e^{ikr} in der oberen Halbebene und für den Term mit e^{-ikr} in der unteren Halbebene schließen. Wir erhalten dann nach dem Residuensatz

$$G(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} e^{-mr} - (-) \frac{1}{2} e^{-mr} \right) = \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (2.111)$$

Dies ist das sogenannte Yukawa-Potential (für $m = 0$ Coulomb-Potential). In mathematischen Worten: die Greensche Funktion zur DGL.

2.7.2 Numerik

Fourierintegrale werden numerisch durch Diskretisierung des Definitionsbereichs (zu N äquidistanten Punkten) einer gegebenen Funktion mittels diskreter Fouriersummen berechnet:

$$\tilde{z}_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} z_m e^{-\frac{2\pi i}{N} lm}, \quad z_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{z}_l e^{\frac{2\pi i}{N} lm}. \quad (2.112)$$

Diese Transformationen sind invers zueinander.

Für die effiziente Berechnung der numerischen Transformation geht man nicht nach Definition vor. Das würde bei N Funktionswerten, die sich ergeben aus Summen von N Produkten, eine Komplexität von $\mathcal{O}(N^2)$ liefern bzw. eine Rechenzeit ergeben, die proportional zum Quadrat

der Gitterpunkt-Zahl ist. Die sogenannte Fast-Fourier-Transformation (FFT) nutzt die Faktorisierbarkeit von N und kann optimal eine Komplexität von nur $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$ haben. Dieser Fall wird erreicht, wenn N vollständig in kleine Primfaktoren zerfällt, z.B. $N = 2^n$. Es gibt für die FFT fertige Algorithmen bzw. Programme.

Warnung bei Berechnung von Fourier-Transformationen von Funktionen mit langsam abfallender Asymptotik und/oder Singularitäten auch vermeintlich harmloser Art (Sprünge in der Funktion oder Ableitungen): Hier gewinnt man höhere Genauigkeit nicht durch Erhöhen der Dichte der Gitterpunkte oder Erhöhung der Länge des Intervalls. Man muß Subtraktionsterme einführen und diese “von Hand” transformieren.

3 Funktionalanalysis

Wir befassen uns hier mit Vektorräumen, die ∞ -dimensional sein können. Wir setzen Grundbegriffe voraus

$V, +, \cdot$	Vektorraum, Addition, Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}
Norm	$\ \cdot \ : V \rightarrow \mathbb{R}$
Definitheit	$\ v \ \geq 0$, wobei $\ v \ = 0 \Leftrightarrow v = 0$
Homogenität	$\ \lambda \cdot v \ = \lambda \cdot \ v \ $
Dreiecksungleichung	$\ v_1 + v_2 \ \leq \ v_1 \ + \ v_2 \ $

Beispiel(e) 3.1. für $V = \mathbb{K}^n$ über \mathbb{K} mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} mit p -Norm ($1 \leq p < \infty$)

$$\| \alpha \|_p := \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^p \right)^{1/p}, \quad (3.1)$$

liefert Vektorraum $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_p)$

Wichtigster Fall: $p = 2$ “quadratische Norm”, “Euklidische Norm”.

Supremums-Norm

$$\| \alpha \|_\infty := \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}. \quad (3.2)$$

Beispiel(e) 3.2. $V =$ Folgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} bzw. Unterräume, auf denen die folgenden Ausdrücke definiert sind

$$(l^p, \| \cdot \|_p) : \quad \| \alpha \|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p \right)^{1/p}, \quad (3.3a)$$

$$(l^\infty, \| \cdot \|_\infty) : \quad \| \alpha \|_\infty = \sup_j |\alpha_j| \quad \text{bzw.} \quad \sup(\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots\}). \quad (3.3b)$$

Beispiel(e) 3.3. Funktionenräume: stetige Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, d.h. $C([a, b], \mathbb{K})$

$$(C([a, b], \mathbb{K}), \| \cdot \|_p) : \quad \| f \|_p := \left(\int_a^b dt |f(t)|^p \right)^{1/p}. \quad (3.4)$$

Die p -Normen erfüllen für $p \geq 1$ die Dreiecksungleichung, da

$$\text{Minkowski – Ungleichung : } \left(\sum_j |\alpha_j + \beta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_j |\alpha_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_j |\beta_j|^p \right)^{1/p}, \quad (3.5)$$

was für $p < 1$ nicht erfüllt ist.

Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$

positive Definitheit	$\langle v v \rangle \geq 0$, wobei $\langle v v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
Linearität im 2. Argument	$\langle v_1 \lambda v_2 \rangle = \lambda \langle v_1 v_2 \rangle$,
	$\langle v v_1 + v_2 \rangle = \langle v v_1 \rangle + \langle v v_2 \rangle$,
“Symmetrie”	$\langle v_1 v_2 \rangle = (\langle v_2 v_1 \rangle)^*$,

wobei mit $*$ die komplexe Konjugation bezeichnet wird und aus der Linearität im 2. Argument und der Symmetrie folgt, daß das Skalarprodukt auch im 1. Argument additiv ist, aber Faktoren λ als komplex konjugierte Größe λ^* vor dem Skalarprodukt erscheinen.

Jedes Skalarprodukt definiert eine kanonische Norm

$$\| v \| := \sqrt{\langle v | v \rangle}. \quad (3.6)$$

Beispiel(e) 3.4. *Folgen: auf $(l^2, \| \cdot \|_2)$ ist definiert*

$$\langle \alpha | \beta \rangle := \sum_j \alpha_j^* \beta_j. \quad (3.7)$$

Beispiel(e) 3.5. *Funktionen: auf $(C([a, b]), \| \cdot \|_2)$ ist definiert*

$$\langle f | g \rangle := \int_a^b dt f(t)^* g(t). \quad (3.8)$$

Oder auch mit einer Gewichtsfunktion $w \in C([a, b])$ mit $w(t) > 0$ für alle t definiert

$$\langle f | g \rangle_w := \int_a^b dt w(t) f(t)^* g(t), \quad (3.9)$$

ein Skalarprodukt mit normiertem Raum $(C([a, b]), \| \cdot \|_2^w)$.

Es gilt

- (i) Schwarzsche Ungleichung $|\langle v_1 | v_2 \rangle| \leq \| v_1 \| \cdot \| v_2 \|$,
- (ii) $\| v_1 + v_2 \| = \| v_1 \| + \| v_2 \| \Rightarrow v_1, v_2$ linear abhängig,
- (iii) Parallelogrammidentität $\| v_1 + v_2 \|^2 + \| v_1 - v_2 \|^2 = 2(\| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2)$,

(iv) Polarisierungsidentität

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle v_1 | v_2 \rangle = \frac{1}{4} (\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2), \quad (3.10a)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle v_1 | v_2 \rangle = \frac{1}{4} (\|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2 + i \|v_1 - iv_2\|^2 - i \|v_1 + iv_2\|^2). \quad (3.10b)$$

Theorem 3.1. (Jordan und von Neumann)

Einer Norm $\| \cdot \|$ liegt genau dann ein Skalarprodukt zu Grunde, wenn die Parallelogrammidentität erfüllt ist.

Definition 3.1. Hilbert-Räume

Ein Raum $(V, \| \cdot \|)$ heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert (auch Banach-Raum genannt).

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der als normierter Raum betrachtet vollständig ist, heißt Hilbert-Raum.

Gram-Schmidt-Orthonormierung

Gaußapproximation

Sei e_1, e_2, \dots, e_n ein Orthonormalsystem (ONS). Es gilt für beliebiges $v \in V$

$$\left\| v - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v | e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \langle e_i | v \rangle + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \quad (3.11a)$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle e_i | v \rangle|^2 + \sum_{i=1}^n (|\langle e_i | v \rangle|^2 - \alpha_i \langle v | e_i \rangle - \alpha_i^* \langle e_i | v \rangle + |\alpha_i|^2) \quad (3.11b)$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle e_i | v \rangle|^2 + \underbrace{\left\| \sum_{i=1}^n (\langle e_i | v \rangle - \alpha_i) e_i \right\|^2}_{\geq 0} \quad (3.11c)$$

$$\geq \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle e_i | v \rangle|^2, \quad (3.11d)$$

und Gleichheit (“beste Approximation”) gilt genau dann, wenn $\alpha_i = \langle e_i | v \rangle$ für alle i gilt.

Theorem 3.2. (Besselungleichung)

Für ein Orthonormalsystem e_1, e_2, \dots gilt:

$$\|v\|^2 \geq \sum_{\text{alle } i} |\langle e_i | v \rangle|^2, \quad (3.12)$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn

$$\left\| v - \sum_{\text{alle } i} \langle e_i | v \rangle e_i \right\|^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad v = \sum_{\text{alle } i} \langle e_i | v \rangle e_i. \quad (3.13)$$

Beweis.

$$\|v\|^2 = \left\| v - \sum_{\text{alle } i} \langle e_i|v \rangle e_i + \sum_{\text{alle } i} \langle e_i|v \rangle e_i \right\|^2 \quad (3.14a)$$

$$= \left\| v - \sum_{\text{alle } i} \langle e_i|v \rangle e_i \right\|^2 + \left\| \sum_{\text{alle } i} \langle e_i|v \rangle e_i \right\|^2 \quad (3.14b)$$

$$\geq \left\| \sum_{\text{alle } i} \langle e_i|v \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{\text{alle } i} |\langle e_i|v \rangle|^2. \quad (3.14c)$$

□

Bemerkung: “Beste Approximation” wird zur Identität, genau dann wenn in (3.12) Gleichheit gilt.

Definition 3.2. (*Orthonormalbasis, ONB*)

Ein Orthonormalsystem e_1, e_2, \dots heißt *Orthonormalbasis*, wenn für jedes v die Identität

$$\|v\|^2 = \left\| \sum_i \langle e_i|v \rangle e_i \right\|^2, \quad (3.15)$$

gilt.

Bemerkung: Es gilt dann auch schon $v = \sum_{\text{alle } i} \langle e_i|v \rangle e_i$ und

$$\langle v|v' \rangle = \left\langle \sum_i \langle e_i|v \rangle e_i \left| \sum_j \langle e_j|v' \rangle e_j \right. \right\rangle = \sum_i \langle v|e_i \rangle \langle e_i|v' \rangle. \quad (3.16)$$

Definition 3.3. Ein normierter Raum V heißt *separabel*, wenn es in V eine abzählbare dichte Teilmenge W gibt.

3.1 Der quantenmechanische 1-dimensionale harmonische Oszillator

Wir behandeln hier den *quantenmechanischen* harmonischen 1-dimensionalen Oszillator. Die Wellenfunktionen entstammen dem Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Auf dem (dichten) Unterraum der zweimal differenzierbaren Funktionen ist der folgende “Hamilton-Operator” H definiert

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2, \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} \right), \quad (3.17a)$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.17b)$$

Wir suchen Eigenfunktionen zu H , d.h.

$$H\psi = E\psi, \quad \text{wobei :} \quad (3.18a)$$

$$(H\psi)(x) = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) \psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) \psi(x) \quad (3.18b)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \psi(x), \quad (3.18c)$$

Wir werden auf den nächsten Seiten herleiten, daß die Eigenwerte von H nicht nur diskret verteilt sind, sondern äquidistant

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.19)$$

wobei die (normierten) Eigenfunktionen gegeben sind durch

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{k_0}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(k_0 x) e^{-k_0^2 x^2 / 2}, \quad k_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad (3.20)$$

und H_n die sogenannten Hermite-Polynome sind

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n e^{-z^2}. \quad (3.21)$$

Das Polynom H_n ist vom Grad n . Jeder der Eigenwerte (3.19) ist *einfach*, d.h. die zugehörige Eigenfunktion ist bis auf Normierung eindeutig bestimmt (bzw. der Eigenraum ist 1-dimensional). Das ONS $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bildet eine ONB des Raumes der quadratintegrablen Funktionen.

Das benutzte Skalarprodukt ist das in (3.8) definierte (mit Definitionsbereich \mathbb{R} für $[a, b]$) bzw. das Skalarprodukt in (3.9) mit konstanter Gewichtsfunktion $w = 1$. Offenbar ist $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzgl. $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ ein ONS, genau dann wenn $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bzgl. $\langle \cdot | \cdot \rangle_w$ mit $w(x) = e^{-x^2}$ ein ONS ist.

Wir wollen die Aussagen herleiten. Zunächst einmal stellen wir fest, daß der Impulsoperator p selbstadjungiert ist, $p^+ = p$ bzw. $\langle \phi | p\psi \rangle = \langle p\phi | \psi \rangle$ für alle Funktionen ϕ, ψ

$$\langle \phi | p\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \quad (3.22a)$$

$$= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial}{\partial x} \phi^*(x) \frac{\hbar}{i} \psi(x) \quad (3.22b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \right]^* \psi(x) \quad (3.22c)$$

$$= \langle p\phi | \psi \rangle, \quad (3.22d)$$

wobei wir in der zweiten Zeile partiell integriert haben, der Oberflächenterm null ist, da die Funktionen wegen der Quadratintegrabilität bei $\pm\infty$ gegen null gehen müssen.

Da der Impulsoperator selbstadjungiert ist, ist es auch der Hamiltonoperator, d.h. $H^+ = H$. Die ist eine ganz allgemeine Eigenschaft bzw. Forderung an Hamilton-Operatoren. Hieraus folgt übrigens, daß die Eigenwerte von H ganz allgemein reell sein müssen

$$H\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad E\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | H\psi \rangle = \langle H\psi | \psi \rangle = \langle E\psi | \psi \rangle = E^* \langle \psi | \psi \rangle. \quad (3.23)$$

Wir definieren nun zwei Operatoren, die nicht selbstadjungiert sind, aber das jeweilig Adjungierte des anderen

$$b := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(k_0 x + i \frac{p}{\hbar k_0} \right), \quad (3.24a)$$

$$b^+ := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(k_0 x - i \frac{p}{\hbar k_0} \right), \quad (3.24b)$$

wobei wir zunächst einmal k_0 als beliebige positive reelle Konstante betrachten und erst etwas später spezifizieren. Die Operatoren kommutieren nicht miteinander, da sie Linearkombinationen von Ortsoperator x und Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial x}$ sind. Das Maß des Nichtkommutierens zweier Operatoren A und B wird durch den ‘‘Kommutator’’ $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$ ‘‘gemessen’’. Der Kommutator ist selbst ein Operator mit der Wirkung auf Vektoren (Wellenfunktionen, Zustände) ψ wie: $[A, B]\psi = A(B\psi) - B(A\psi)$, so daß

$$[p, x] = \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, x \right] = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x}, x \right] = \frac{\hbar}{i}, \text{ da } \left[\frac{\partial}{\partial x}, x \right] \psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} (x\psi(x)) - x \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) = \psi(x). \quad (3.25a)$$

Was haben b und b^+ mit H ‘‘zu tun’’? Gäbe es das Problem des Nichtkommutierens von Ortsoperator x und Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial x}$ nicht, so wäre das Produkt b^+b bei geeigneter Wahl von k_0 gleich dem Hamiltonoperator. Tatsächlich liefert die vollständige Rechnung nur eine additive Konstante:

$$b^+b = \frac{1}{2} \left(k_0 x - i \frac{p}{\hbar k_0} \right) \left(k_0 x + i \frac{p}{\hbar k_0} \right) \quad (3.26a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(k_0^2 x^2 + \left[k_0 x, i \frac{p}{\hbar k_0} \right] + \frac{p^2}{\hbar^2 k_0^2} \right) \quad (3.26b)$$

$$= \frac{1}{2} \left(k_0^2 x^2 - 1 + \frac{p^2}{\hbar^2 k_0^2} \right) \quad (3.26c)$$

$$= \frac{H}{\hbar \omega} - \frac{1}{2}, \quad \text{wenn } k_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad (3.26d)$$

wobei wir beim Übergang von der zweiten in die dritte Zeile das explizite Ergebnis für den Kommutator $[p, x] = \hbar/i$ aus (3.25a) benutzt haben. Wir erhalten nun

$$H = \hbar \omega \left(b^+b + \frac{1}{2} \right). \quad (3.27)$$

Hätten wir das Produkt bb^+ berechnet, hätten wir statt (3.26d) den Ausdruck $H/\hbar\omega + \frac{1}{2}$ gefunden, was u.a. bedeutet

$$[b^+, b] = b^+b - bb^+ = -1, \quad \text{oder } [b, b^+] = 1. \quad (3.28)$$

Wir sehen aus (3.27) erneut, daß die Eigenwerte von H reell sind, da b^+b (natürlich) selbstadjungiert ist, denn $(b^+b)^+ = b^+(b^+)^+ = b^+b$. Aber zusätzlich gilt, daß b^+b positiv semi-definit ist,

$$b^+b \geq 0. \quad (3.29a)$$

Erinnerung: Ein selbstadjungierter Operator A heißt positiv semi-definit, wenn für alle ψ gilt

$$\langle \psi | A \psi \rangle \geq 0. \quad (3.30)$$

Diese Eigenschaft ist für $A = b^+b$ natürlich erfüllt, da $\langle \psi | b^+b \psi \rangle = \langle b \psi | b \psi \rangle \geq 0$, wobei die letzte Eigenschaft aus der positiven Definitheit des Skalarproduktes folgt.

Aus der positiven Semi-Definitheit von b^+b folgt, daß jeder Eigenwert ≥ 0 sein muß

$$b^+b \phi = n \phi \quad \Rightarrow \quad n \langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi | b^+b \phi \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n \geq 0. \quad (3.31)$$

Aus (3.27) folgt, daß die Energien nicht einfach nur – wie in der klassischen Mechanik – größer oder gleich null sind, sondern ein Mindestquantum, nämlich $\frac{1}{2}\hbar\omega$ haben müssen. Dies wird als Nullpunktoszillation bezeichnet: Ort und Impuls können wegen der Nichtkommutativität der Operatoren nicht simultan den Wert 0 annehmen.

Wir wollen nun zeigen, daß alle Eigenfunktionen von b^+b gegeben sind durch

$$(b^+)^n \phi_0, \quad \text{wobei } \phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}k_0^2 x^2\right). \quad (3.32)$$

Beweis.

- (i) Wir zeigen zunächst $b\phi_0 = 0$ (insbesondere ist ϕ_0 Eigenfunktion zu b^+b mit Eigenwert 0)

$$b\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}k_0} \left(k_0^2 x + i\frac{p}{\hbar}\right) \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}k_0} \left(k_0^2 x + \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi_0 = 0, \quad (3.33)$$

wobei zuletzt die explizite Form der Funktion ϕ_0 benutzt wurde bzw. diese durch die Forderung (3.33) eindeutig bis auf skalare Faktoren definiert ist. Beachte, daß ϕ_0 wie in (3.32) normiert ist.

- (ii) außerdem gilt

$$b(b^+)^n = n(b^+)^{n-1} + (b^+)^n b, \quad (3.34)$$

was durch vollständige Induktion bewiesen werden kann, wobei insbesondere (3.28) zum Einsatz kommt. Aus dieser Relation folgt (multipliziere von links b^+ und rechts ϕ_0)

$$b^+b(b^+)^n \phi_0 = n(b^+)^n \phi_0 + (b^+)^{n+1} \underbrace{b\phi_0}_{=0} = n(b^+)^n \phi_0, \quad (3.35a)$$

$$\text{d.h. } Av = \lambda v \quad \text{mit } A = b^+b, v = (b^+)^n \phi_0, \text{ und } \lambda = n, \quad (3.35b)$$

was einfach bedeutet, daß $(b^+)^n \phi_0$ Eigenfunktion von b^+b mit Eigenwert n ist. Der Operator b^+ heißt aus diesem Grund auch ‘‘Aufsteigeoperator’’. (Wir zeigen noch, daß die konstruierten Funktionen ungleich null sind.)

- (iii) Sei nun irgendeine Eigenfunktion ϕ gegeben zu einem Eigenwert $\lambda > 0$. Man kann analog zu oben zeigen, daß

$$b^n \phi \quad \text{ist Eigenfunktion von } b^+b \text{ zu Eigenwert } \lambda - n. \quad (3.36)$$

Der Operator b heißt aus diesem Grund auch “Absteigeoperator”. Nun können wir aber für n eine beliebig große natürliche Zahl wählen, so daß $\lambda - n$ negativ wird. Eigenwerte von b^+b müssen aber ≥ 0 sein. Dies bedeutet, daß $b^n\phi = 0$ für hinreichend großes n gelten muß. Sei nun n_0 die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$b^{n_0}\phi \neq 0, \quad \text{aber } b^{n_0+1}\phi = bb^{n_0}\phi = 0, \quad (3.37)$$

woraus folgt, daß $b^{n_0}\phi$ gleich bzw. proportional zu ϕ_0 ist. Aus $b^{n_0}\phi = \alpha\phi_0$ mit $\alpha \neq 0$ folgt

$$(b^+)^{n_0}b^{n_0}\phi = \alpha(b^+)^{n_0}\phi_0, \quad (3.38)$$

und die linke Seite kann als $P(b^+b)\phi$ geschrieben werden, wobei $P(\cdot)$ ein Polynom ist, Beweis rekursiv

$$(b^+)^1b^1 = b^+b, \quad (b^+)^2b^2 = b^+b^+bb = b^+(bb^+ - 1)b = (b^+b)^2 - b^+b, \quad \text{usw.} \quad (3.39)$$

wobei insbesondere (3.28) zum Einsatz kommt. Aber ϕ ist Eigenfunktion zu b^+b mit Eigenwert λ . Damit folgt für (3.38)

$$P(b^+b)\phi = P(\lambda)\phi \quad \Rightarrow \quad \alpha(b^+)^{n_0}\phi_0 = (b^+)^{n_0}b^{n_0}\phi = P(b^+b)\phi = P(\lambda)\phi, \quad (3.40)$$

Nun kann die Zahl $P(\lambda)$ nicht null sein, sonst müßte die linke Seite ebenso null sein, also

$$\phi = \frac{\alpha}{P(\lambda)}(b^+)^{n_0}\phi_0, \quad (3.41)$$

und damit ist ϕ vom Typ der unter (ii) konstruierten Eigenfunktionen. □

Wir haben nun alle Eigenfunktionen bestimmt. Wenn wir nun benutzen/annehmen, daß das vollständige System von Eigenzuständen eines hermiteschen Operators H analog zum endlich-dimensionalen Fall eine Basis des zu Grunde liegenden Raumes darstellt, können wir sagen, daß die Zustände/Funktionen $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis des Raumes der quadratintegrablen Funktionen darstellen und zwar eine Eigenbasis zum Hamiltonoperator H .

Wir wollen noch verstehen, warum die Funktionen wie in (3.19) mit (3.21) geschrieben werden können. Wir schreiben dazu den “Aufsteigeoperator” um

$$b^+ := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(k_0x - i \frac{p}{\hbar k_0} \right) = \frac{-1}{\sqrt{2k_0}} \left(-k_0^2x + \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{-1}{\sqrt{2k_0}} e^{k_0^2x^2/2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) e^{-k_0^2x^2/2}, \quad (3.42)$$

wobei die letzte Identität wegen der Produktregel gilt und Operatoren durch ihre Wirkung auf Vektoren/Funktionen erklärt sind:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) e^{-k_0^2x^2/2} \psi(x) = -k_0^2x e^{-k_0^2x^2/2} \psi(x) + e^{-k_0^2x^2/2} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \quad (3.43a)$$

$$= e^{-k_0^2x^2/2} \left(-k_0^2x \psi(x) + \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \right) = e^{-k_0^2x^2/2} \left(-k_0^2x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x). \quad (3.43b)$$

Damit gilt für n -malige Anwendung

$$(b^+)^n := \frac{(-1)^n}{2^{n/2}} e^{z^2/2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n e^{-z^2/2}, \quad \text{wobei } z := k_0x, \quad (3.44)$$

und dies auf $e^{-z^2/2}$ angewendet liefert – bis auf die Normierung – die Funktion in (3.20,3.21).

3.2 Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)

Wir wollen in diesem Abschnitt ein vollständiges Funktionensystem auf der Einheitssphäre kennenlernen. Wir werden mit sphärischen Koordinaten, d.h. mit Polar- und Azimut-Winkeln arbeiten. Es gibt viele Anwendungsgebiete

- Intensitätsverteilung der kosmischen Hintergrundstrahlung,
- Multipolentwicklung von elektrischen, magnetischen und Gravitations-Feldern,
- Berechnung von Energiespektren von Atomen,
- Konstruktion harmonischer Polynome in x, y, z .

Wir wollen uns mit der Laplace-Gleichung und verwandten Problemen im \mathbb{R}^3 befassen

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = 0. \quad (3.45)$$

Man kann polynomiale Ansätze machen

$$f = x, y, z \quad (3.46a)$$

alles Lösungen, 3 – dim Lösungsraum ,

$$= \text{Linearkombination von } x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx \quad (3.46b)$$

hier gibt es 5 linear – unabhängige Kombinationen ,

$$= \text{Ansatz mit homogenen Polynomen } l. \text{ Grades bilden } \binom{l+2}{2} - \text{dim Raum ,}$$

$$\text{aber Lösungsraum ist nur } (2l + 1) - \text{dimensional.} \quad (3.46c)$$

Ein systematischer Zugang, auch zu nicht-polynomialen Lösungen, bietet die Transformation auf Kugelkoordinaten r, θ, ϕ

$$\vec{r}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.47a)$$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r}(r, \theta, \phi), \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{r}(r, \theta, \phi), \quad \vec{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{r}(r, \theta, \phi), \quad (3.47b)$$

(positiv orientiertes Dreibein, insbesondere orthonormiert),

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{Volumenelement}), \quad (3.47c)$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (\text{Gradient}). \quad (3.47d)$$

Die Gradientenformel gilt, da \vec{e}_r , $r\vec{e}_\theta$, $r \sin \theta \vec{e}_\phi$ die Ableitungen von $\vec{r}(r, \theta, \phi)$ nach r , θ , ϕ sind sowie

$$\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial r} f(\vec{r}(r, \theta, \phi)), \quad (3.48a)$$

$$r\vec{e}_\theta \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial \theta} f(\vec{r}(r, \theta, \phi)), \quad (3.48b)$$

$$r \sin \theta \vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial \phi} f(\vec{r}(r, \theta, \phi)). \quad (3.48c)$$

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta f = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) f. \quad (3.49)$$

Dieser Ausdruck folgt eindeutig aus den Eigenschaften von Divergenz und Gradient etc. Für beliebige Funktionen $\tilde{\psi}$ und ψ mit geeigneter Asymptotik werten wir das Volumenintegral aus

$$\int dV \tilde{\psi} \Delta \psi = - \int dV \vec{\nabla} \tilde{\psi} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (3.50a)$$

$$= - \int dV \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\psi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\psi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \psi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \tilde{\psi} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \psi \right) \right] \quad (3.50b)$$

$$= \int dV \tilde{\psi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi. \quad (3.50c)$$

wobei von der 1. zur 2. Zeile die Gradientenformel (3.47d) und von der 2. zur 3. Zeile das Volumenelement $dV = dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta$ und partielle Integration bzgl. r bzw. θ bzw. ϕ benutzt wurde.

Wir definieren den Drehimpulsoperator

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i} \vec{r} \times \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}, \quad \text{z.B.} \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (3.51)$$

wobei jede Komponente selbstadjungiert ist! In Kugelkoordinaten

$$\frac{i}{\hbar} \vec{L} = r \vec{e}_r \times \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.52a)$$

$$= \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \vec{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.52b)$$

wobei von der 1. Zeile zur 2. Zeile benutzt wurde, daß die Vektoren \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ ein positiv orientiertes Dreibein sind, wobei u.a. $\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = -\vec{e}_\theta$ gelten. In kartesischen Koordinaten lauten \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ

$$\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

und der Drehimpulsoperator

$$\frac{i}{\hbar} \vec{L} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Wir definieren nun hilfreiche Linearkombinationen

$$L^\pm := L_x \pm iL_y, \quad \frac{L^\pm}{\hbar} = e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (3.55a)$$

$$\frac{L_z}{\hbar} = -i \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (3.55b)$$

Wir brauchen Produkte dieser Operatoren

$$\frac{L^+ L^-}{\hbar^2} = e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.56a)$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot \theta \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (3.56b)$$

$$\frac{L^- L^+}{\hbar^2} = \text{wie oben mit } \phi \leftrightarrow -\phi. \quad (3.56c)$$

Aus diesen Ergebnissen erhalten wir nun das Quadrat des Drehimpulsoperators

$$\frac{1}{\hbar^2} (L^+ L^- + L^- L^+) = -2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2 \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.57a)$$

$$\frac{1}{\hbar^2} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} L^+ L^- + \frac{1}{2} L^- L^+ + L_z^2 \right) \quad (3.57b)$$

$$= - \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.57c)$$

$$= - \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (3.57d)$$

Der Laplace-Operator lautet nun

$$\Delta f = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{L}}{\hbar} \right)^2 \right] f, \quad (3.58)$$

wobei der erste Differentialoperator allein auf die r -Abhängigkeit und der zweite Differentialoperator auf die (θ, ϕ) -Abhängigkeit einer Funktion wirkt. Die Konstruktion von Eigenfunktionen von Δ gelingt nun in faktorisierte Form $f(r)Y(\theta, \phi)$ wobei die Funktion $Y(\theta, \phi)$ Eigenfunktion von \vec{L}^2 ist. Da der Operator \vec{L}^2 offensichtlich mit L_z kommutiert, können wir beide simultan diagonalisieren.

3.2.1 Simultane Diagonalisierung von \vec{L}^2 und L_z (ab hier $\hbar \equiv 1$)

An Hand der Darstellung der Operatoren in Kugelkoordinaten sehen wir direkt

$$[L_z, L^\pm] = \pm L^\pm, \quad (3.59)$$

und

$$[\vec{L}^2, L_z] = 0. \quad (3.60)$$

Es gilt aber allgemeiner, und kann z.B. in kartesischen Koordinaten gezeigt werden, das Kommutieren von \vec{L}^2 mit allen Komponenten von \vec{L}

$$[\vec{L}^2, L_{x,y,z}] = 0, \quad (3.61)$$

woraus dann offenbar auch

$$[\vec{L}^2, L^\pm] = 0, \quad (3.62)$$

folgt. Wir wollen dies nutzen.

Sei ψ eine simultane Eigenfunktion zu \vec{L}^2 und L_z mit Eigenwerten Λ und m . Wegen der Selbstadjungiertheit der Operatoren \vec{L}^2 und L_z sind Λ und m reell. Auf Grund der Operatorungleichung der beiden selbstadjungierten Operatoren

$$\vec{L}^2 \geq L_z^2, \quad (3.63)$$

d.h. wegen der Positivsemidefinitheit (3.30) der Differenz der Operatoren ($\vec{L}^2 - L_z^2 = L_x^2 + L_y^2 \geq 0$) muß aber nun auch für die Eigenwerte gelten

$$\Lambda \geq m^2. \quad (3.64)$$

(Allgemeiner Fall: Seien A und B selbstadjungierte Operatoren mit $A \geq B$. Für einen Eigenzustand ψ simultan zu A und B mit Eigenwerten a und b folgt $0 \leq \langle \psi | (A - B) \psi \rangle = \langle \psi | (a - b) \psi \rangle = (a - b) \langle \psi | \psi \rangle \Rightarrow 0 \leq a - b$ bzw. $a \geq b$.)

Wir können schnell zeigen, daß die Werte m ganzzahlig sein müssen. Denn die Eigenfunktion zu L_z mit Eigenwert m hat die Form

$$\psi(\theta, \phi) = f(\theta) \cdot e^{im\phi}, \quad (3.65)$$

aber $\psi(\theta, \phi)$ muß in ϕ eine 2π -periodische Funktion sein, woraus die Behauptung folgt.

Wir zeigen, daß auch $L^\pm \psi$ Eigenfunktion zu \vec{L}^2 und L_z ist mit Eigenwerten Λ und $m \pm 1$

$$\vec{L}^2 L^\pm \psi = L^\pm \vec{L}^2 \psi = \Lambda L^\pm \psi, \quad (3.66a)$$

$$\vec{L}_z L^\pm \psi = ([L_z, L^\pm] + L^\pm L_z) \psi = (\pm L^\pm + m L^\pm) \psi = (m \pm 1) L^\pm \psi, \quad (3.66b)$$

wobei wir die Kommutatoreigenschaften der Operatoren benutzt haben. Wir sehen, daß die neuen Eigenfunktionen Eigenwerte $m \pm 1$ haben, die bei wiederholter Anwendung der

Auf-/Absteige-Operatoren ohne Schranken wachsen bzw. fallen. Dies ist jedoch ein Problem, wenn der Eigenwert die durch Λ gesetzte Schranke trifft. Es muß also irgendeine Potenz von L^+ auf ψ angewendet null ergeben, ebenso für L^- .

Sei nun $\tilde{\psi}$ die Funktion, die sich aus Anwenden von Potenzen von L^+ ergibt und noch nicht null ist, aber

$$L^+\tilde{\psi} = 0 \quad (3.67)$$

erfüllt. Wir wollen diese Gleichung lösen. Sei der L_z -Eigenwert dieser Funktion $\tilde{\psi}$ gleich l (ganzzahlig). Offenbar wird $\tilde{\psi}$ von ψ durch $(l - m)$ -maliger Anwendung von L^+ Operatoren erreicht. Wir wissen

$$\tilde{\psi} = f(\theta)e^{il\phi}, \quad (3.68a)$$

$$0 = L^+\tilde{\psi} = e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) f(\theta)e^{il\phi} = e^{i(l+1)\phi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - l \cot\theta \right) f(\theta), \quad (3.68b)$$

woraus folgt, daß $f(\theta) = c(\sin\theta)^l$ ist. Wenn wir für den Augenblick unwichtige Konstanten gleich 1 setzen, erhalten wir

$$\tilde{\psi} = (\sin\theta)^l e^{il\phi}. \quad (3.69)$$

Da die Funktionen, mit denen wir es zu tun haben, quadratintegabel sein müssen, kann hier l nur Werte genau aus \mathbb{N}_0 annehmen. Der Eigenwert dieser Funktion bzgl. \vec{L}^2 ist (etwas rechnen)

$$\Lambda = l(l+1), \quad (3.70)$$

Die Funktion $\tilde{\psi}$ heißt weiter unten $Y_{l,l}$.

Wir hätten auch mit dem Operator L^- arbeiten können und hätten eine Funktion $\hat{\psi}$ gefunden, für die

$$L^-\hat{\psi} = 0 \quad (3.71)$$

gilt mit Lösung (konstanter Vorfaktor auf 1 gesetzt)

$$\hat{\psi} = (\sin\theta)^l e^{-il\phi}. \quad (3.72)$$

mit gleicher Zahl l , da ja der Eigenwert von $\hat{\psi}$ zu \vec{L}^2 derselbe sein muß wie der von $\tilde{\psi}$. Die Funktion $\hat{\psi}$ heißt weiter unten $Y_{l,-l}$.

Wir erhalten nun alle simultanen Eigenfunktionen zu \vec{L}^2 und L_z , indem wir für alle $l \in \mathbb{N}_0$ ausgehend von (3.69) bzw. (3.72) durch Anwenden von L^+ bzw. L^- ein Multiplett an Funktionen konstruieren. (Beide Verfahren liefern die gleichen Funktionen.) Es handelt sich bei gegebenem l um $2l + 1$ viele Funktionen. Diese Funktionen werden (bei geeigneter Normierung) $Y_{l,m}$ genannt, wobei die Werte $l \in \mathbb{N}_0, m = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l-1, l$ die Eigenwerte zu \vec{L}^2 und L_z liefern.

Alternativ, und für die Anwendungen direkter, ist die Benutzung der Funktion $Y_{l,0}$ mit Eigenwert $l(l+1)$ zu \vec{L}^2 und 0 zu \vec{L}_z als Ausgangspunkt. Wir konstruieren nun eine Eigenfunktion zu \vec{L}^2 ,

die nur von θ abhängt, d.h. $f = f(\theta)$. Mit (3.57d) erhalten wir (beachte $\hbar = 1$)

$$\vec{L}^2 f = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} f = \frac{d}{dx} (x^2 - 1) \frac{d}{dx} f, \quad (3.73)$$

wobei wir die Substitution $x := \cos \theta$ benutzt haben. Wir betrachten nun die einfache Identität

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}, \quad (3.74)$$

und multiplizieren beide Seiten mit $(x^2 - 1)$

$$(x^2 - 1)D(x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^n, \text{ mit } D := \frac{d}{dx}. \quad (3.75)$$

Nun leiten wir beide Seiten $(n + 1)$ -mal nach x ab und benutzen die Formel

$$D^{n+1}(ab) = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (D^j a)(D^{n+1-j} b), \quad (3.76)$$

wobei in unserer Anwendung auf (3.75) nur $j = 0, 1, 2$ vorkommen

$$[(x^2 - 1)D^{n+2} + (n + 1)2xD^{n+1} + (n + 1)nD^n] (x^2 - 1)^n \quad (3.77a)$$

$$= [2nxD^{n+1} + (n + 1)2nD^n] (x^2 - 1)^n. \quad (3.77b)$$

Wir bringen nun alles auf eine Seite

$$[(x^2 - 1)D^{n+2} + 2xD^{n+1} - (n + 1)nD^n] (x^2 - 1)^n = 0, \quad (3.78)$$

und mit $(x^2 - 1)D^{n+2} + 2xD^{n+1} = D(x^2 - 1)D^{n+1}$ folgt

$$D(x^2 - 1)DD^n(x^2 - 1)^n = (n + 1)nD^n(x^2 - 1)^n, \quad (3.79)$$

was bedeutet, daß $f = D^n(x^2 - 1)^n$ die Gleichung (3.73) mit Eigenwert $n(n + 1)$ erfüllt. Diese Funktionen heißen Legendre-Polynome. Wir haben hier gezeigt $Y_{l,0} = P_l(\cos \theta)$ (noch unnormiert)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l. \quad (\text{Legendre - Polynome}). \quad (3.80)$$

Mit Normierung lauten die *Kugelflächenfunktionen* ($l = 0, 1, 2, \dots$)

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l - m)!}{(l + m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (0 \leq m \leq l, Y_{l,-m} = Y_{l,m}^*), \quad (3.81a)$$

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^m P_l(x), \quad (\text{zugeordnete Legendre - Funktion}). \quad (3.81b)$$

Wir interessieren uns an dieser Stelle nicht für die Normierung (die natürlich in Anwendungen äußerst wichtig ist) und wollen zeigen, daß man aus $Y_{l,m}$ durch Anwenden von L^+ tatsächlich $Y_{l,m+1}$ erhält. Dazu

$$L^+ P_l^m e^{im\phi} = e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P_l^m e^{im\phi} = e^{i(m+1)\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - m \cot \theta \right) P_l^m \quad (3.82a)$$

$$= e^{i(m+1)\phi} \left(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial \cos \theta} - m \cot \theta \right) P_l^m \quad (3.82b)$$

$$= -e^{i(m+1)\phi} \sqrt{1-x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + m \frac{x}{1-x^2} \right) P_l^m. \quad (3.82c)$$

Wir setzen nun den expliziten Ausdruck für P_l^m ein und wegen des auftretenden Faktors $(1-x^2)^{m/2}$ können wir die Operator-Relation (beide Seiten auf eine Funktion ψ wirken lassen)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + m \frac{x}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{m/2} = (1-x^2)^{m/2} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.83)$$

benutzen und finden

$$L^+ P_l^m e^{im\phi} = (-1)^{m+1} e^{i(m+1)\phi} \sqrt{1-x^2} (1-x^2)^{m/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{m+1} P_l(x) \quad (3.84a)$$

$$= P_l^{m+1} e^{i(m+1)\phi}. \quad (3.84b)$$

Abschließend möchten wir darauf hinweisen, daß die Funktionen $Y_{l,m}$ ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem sind. Sie sind vollständig, da sie aus der vollständigen Diagonalisierung der selbstadjungierten Operatoren \vec{L}^2 und L_z resultieren. Funktionen mit unterschiedlichen Indizes, also $(l, m) \neq (l', m')$ sind orthogonal zueinander, da sie verschiedene Eigenwerte zu \vec{L}^2 und/oder L_z haben. Es liegt ferner Normierung

$$\int d\Omega Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l',m'}(\theta, \phi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi), \quad (3.85)$$

vor, was wir hier aber nicht bewiesen haben. (Das Integral ist über den vollen Raumwinkel, also die Einheitssphäre mit $\theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ zu nehmen.)

3.2.2 Harmonische Funktionen im \mathbb{R}^3

Wir kommen zum Ausgangsproblem zurück und bestimmen Funktionen $\psi = f(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$ die $\Delta\psi$ erfüllen. Nach (3.58) gilt

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - l(l+1) \right) f(r)Y_{l,m} = 0. \quad (3.86)$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch Funktionen $f(r) = r^l$ und $f(r) = r^{-(l+1)}$. Im ersten Fall erhalten wir homogene Polynome in x, y, z vom Grad l . Im zweiten Fall handelt es sich um harmonische Funktionen mit Asymptotik 0. Beide Funktionensätze werden Sie in der Multipolentwicklung von Potentialen brauchen.

Wir betrachten die harmonischen Funktionen vom Polynomtyp. Für den Grad l sind $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$ insgesamt $2l+1$ viele homogene Polynome in x, y, z . Wir betrachten die ersten Fälle explizit

- $l = 0$

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (3.87)$$

- $l = 1$

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad rY_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z, \quad (3.88a)$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, \quad rY_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x \pm iy). \quad (3.88b)$$

- $l = 2$

$$Y_{2,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad r^2 Y_{2,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2), \quad (3.89a)$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}, \quad r^2 Y_{2,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} z(x \pm iy), \quad (3.89b)$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}, \quad r^2 Y_{2,\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x^2 \pm 2ixy - y^2). \quad (3.89c)$$

Im letzten Beispiel sehen Sie (wieder), daß die harmonischen homogenen Polynome vom Grad 2 einen 5-dimensionalen Unterraum des 6-dimensionalen Raums aller homogenen Polynome vom Grad 2 darstellen.

Der allgemeine Ansatz für harmonische Funktionen im \mathbb{R}^3 ist

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{l,m} r^l + b_{l,m} r^{-(l+1)}) Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.90)$$

Je nach Problemstellung tauchen nur manche Terme auf. Insbesondere durch Randbedingungen können sehr viele Terme wegfallen. Betrachtet man einen derartigen Ansatz für beispielsweise ein Potential in einem ladungsfreien endlichen Volumen, so sind die b -Koeffizienten null, da ansonsten das Potential im Ursprung divergiert. Betrachtet man hingegen das Potential außerhalb einer kompakten Ladungsverteilung für beliebig große Abstände, so sind praktisch alle a -Koeffizienten null, es sein denn es ist ein externes Feld überlagert (in vielen Anwendungen ein homogenes Feld, dann dürfen $a_{1,m}$ ungleich null sein, aber $a_{l,m} = 0$ für $l \geq 2$). Wir wollen diesen Fall detailliert untersuchen.

3.2.3 Multipolentwicklung

Nach Coulomb ist das von einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ erzeugte Potential gleich

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.91)$$

Wir betrachten nun den Fall, daß ρ nur innerhalb eines gewissen Radius R von 0 verschieden ist, also im Integral \vec{r}' betragslich kleiner als R angenommen werden kann. Wir sind im weiteren daran interessiert, das Potential außerhalb R zu kennen. Wir können daher annehmen

$$|\vec{r}| > R > |\vec{r}'|. \quad (3.92)$$

Dies ist eine typische Situation beim Arbeiten mit elektrischen Feldern, die von Atomen und Molekülen etc. erzeugt werden. Aber auch Gravitationspotentiale außerhalb der erzeugenden Massenverteilung können so behandelt werden.

Es gelten die folgenden Identitäten

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma), \quad (3.93)$$

wobei γ der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' ist, sowie

$$P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \quad (3.94)$$

wobei \vec{e} und \vec{e}' Einheitsvektoren mit sphärischen Winkeln θ, ϕ und θ', ϕ' sind. Wir wollen diese Identitäten (zunächst) nicht beweisen, sondern zeigen, was man mit Ihnen erreicht.

Wir setzen (3.94) in (3.93) ein

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) r'^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \quad (3.95)$$

und dieses in (3.91) und erhalten

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \rho(\vec{r}') r'^l Y_{l,m}^*(\theta', \phi'). \quad (3.96)$$

Wenn wir nun das sphärische Multipolmoment¹ $q_{l,m}$ definieren als (die gestrichelten Integrationsvariablen können hier gefahrlos ohne Striche geschrieben werden)

$$q_{l,m} := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) r^l Y_{l,m}^*(\theta, \phi), \quad (3.97)$$

dann lautet das Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l q_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.98)$$

¹Achtung: In der Literatur gibt es Normierungen, bei denen ein Faktor auftritt $Q_{l,m} := q_{l,m} \sqrt{4\pi/(2l+1)}$.

Dies ist die sogenannte (sphärische) Multipolentwicklung ($l = 0, 1, 2, 3, \dots$ korrespondieren zu Monopol-, Dipol-, Quadrupol-, Oktupol-, ...-Beiträgen).

Mit den üblichen Normierungen der Literatur kann man auch schreiben

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Q_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (3.99a)$$

$$Q_{l,m} := \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \rho(\vec{r}) r^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l,m}^*(\theta, \phi). \quad (3.99b)$$

Für $l = 0$ ist übrigens $Q_{0,0}$ die Gesamtladung Q . Grundsätzlich hat jede Ladungsverteilung beliebig viele höhere Momente ungleich null. Bei großen Abständen dominieren natürlich die niedrigeren Momente. Dies ist praktisch der einzige Grund, warum Sie für Objekte mit nicht-verschwindender Gesamtladung in den meisten Vorlesungen nur das Monopol-Moment berücksichtigt gesehen haben. Außerdem sind für alle radialsymmetrischen Ladungsverteilungen die Multipolmomente mit $l \geq 1$ gleich 0. Für ladungsneutrale Objekte ist natürlich das Dipolmoment (sofern ungleich 0) das wichtigste.

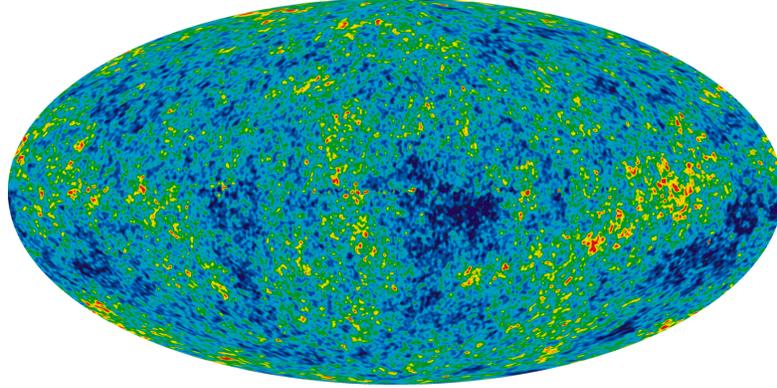
Wir haben hier Anwendungen in der Elektrostatik behandelt. Wir können auch Kugelflächenfunktionen in der Dynamik, also bei zeitabhängigen Problemen mit Gewinn benutzen. So erzeugen zeitabhängige Multipolmomente elektromagnetische Strahlung. Hier ist definitiv das Monopolmoment einer isolierten Ladungsverteilung nicht relevant, egal wie groß es ist: es ist zeitlich konstant! Daher ist für die Strahlungserzeugung der Dipolfall, also die Dipolstrahlung am wichtigsten. Es gibt natürlich auch Quadrupolstrahlung etc.

Astrophysikalische Objekte erzeugen Gravitationsfelder, wobei das Monopolmoment immer größer als null ist. Im statischen Fall ist dieses Moment dominant. Für die Erzeugung von Gravitationswellen sind zeitlich veränderliche Massenverteilungen wesentlich. Wegen der Massenerhaltung (in erster Näherung) und der Erhaltung des Schwerpunktes einer isolierten Massenverteilung mit nur inneren Kräften, ist das Monopolmoment zeitlich konstant, aber auch das Dipolmoment. Daher ist für Gravitationswellen die Quadrupolstrahlung am wichtigsten.

3.2.4 Anwendungen als vollständiges Funktionensystem auf S^2

Hier soll in aller Kürze eine Anwendung von Kugelflächenfunktionen in der Untersuchung der kosmischen (Mikrowellen) Hintergrundstrahlung genannt werden. Die Hintergrundstrahlung ist im Mittel eine Schwarzkörperstrahlung mit Temperatur (von heute) 2,725 K. Die Temperatur der Strahlung ist der einzige Parameter, der außer Naturkonstanten in die Planck-Formel der Energieverteilung eingeht.

Eine genaue Analyse zeigt jedoch eine Raumwinkelabhängigkeit der Temperatur dieser Strahlung. Die folgenden Abbildungen entstammen Wikipedia <https://de.wikipedia.org/wiki/Hintergrundstrahlung>.



Die Temperaturverteilung ist eine Funktion des Raumwinkels und kann nach Kugel­flächenfunktionen entwickelt werden:

$$\Delta T(\theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (3.100)$$

(Hier fehlt der Term $l = 0$, der den Mittelwert beschreibt, also $a_{0,0} = 2,725K$. Deshalb steht auf der linken Seite die Schwankung $\Delta T(\theta, \phi) = T(\theta, \phi) - a_{0,0}$.) Man interessiert sich nun für die Koeffizienten $a_{l,m}$. Man überlegt sich, daß die Koeffizienten selbst koordinatensystemabhängig sind, aber nicht die Größe

$$C_l := \sum_{m=-l}^l |a_{l,m}|^2, \quad (3.101)$$

also die Summe der Betragsquadrate für festes l .

Die gerade gemachte Aussage kann man wie folgt verstehen: Sei $P_{l,m}$ ² der orthogonale Projektor auf die Funktion $Y_{l,m}$ im Raum aller θ, ϕ -abhängigen Funktionen, dann ist

$$P_l := \sum_{m=-l}^l P_{l,m}, \quad (3.102)$$

der Projektor auf den Eigenraum zu \vec{L}^2 mit Eigenwert $l(l+1)$. Dieser Eigenraum ist invariant unter Koordinatentransformationen, denn diese werden erzeugt (Details in der Quantenmechanikvorlesung oder Gruppentheorie) von den Operatoren $L_{x,y,z}$. Diese Operatoren kommutieren aber mit \vec{L}^2 . Somit gilt $D^{-1}P_l D = P_l$, wobei D die Darstellung der $O(3)$ -Operation, also der Drehung des einen in das andere Koordinatensystem, im Funktionenraum ist.

Nun gilt aber für den Erwartungswert von P_l bzgl. einer jeden Funktion ψ (z.B. $\psi = \Delta T$)

$$\langle \psi | P_l \psi \rangle = \sum_{m=-l}^l \langle \psi | P_{l,m} \psi \rangle = \sum_{m=-l}^l \langle \psi | Y_{l,m} \rangle \langle Y_{l,m} | \psi \rangle = \sum_{m=-l}^l a_{l,m}^* a_{l,m} = C_l. \quad (3.103)$$

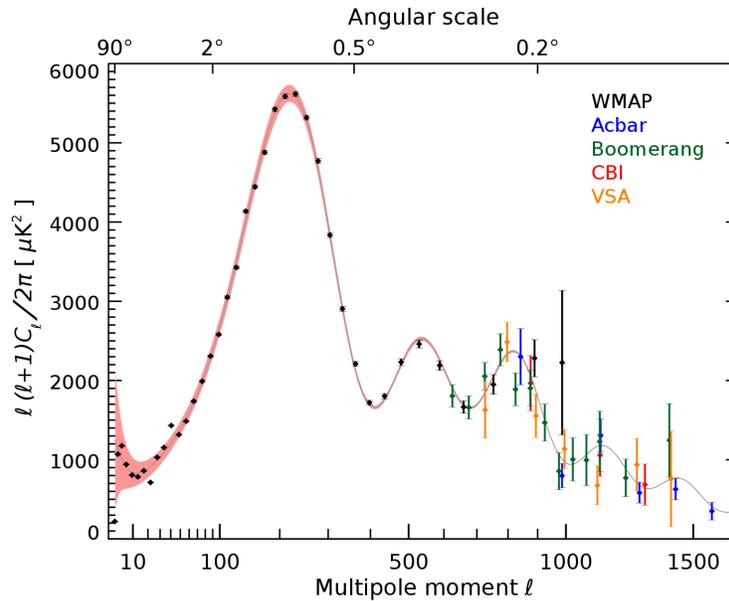
²Bitte diese Projektoren $P_{l,m}$ und P_l nicht mit den Legendre-Polynomen und assoziierten Legendre-Funktionen $P_l(x)$ und $P_l^m(x)$ verwechseln.

Warum gilt die Koordinatensystem-Unabhängigkeit von $\langle \psi | P_l \psi \rangle$? Wenn das Koordinatensystem geändert wird, so wird ψ auf eine Funktion $D\psi$ transformiert, mit D wie oben. Es gilt aber

$$\langle D\psi | P_l D\psi \rangle = \langle \psi | \underbrace{D^+ P_l D}_{=P_l} \psi \rangle = \langle \psi | P_l \psi \rangle, \quad (3.104)$$

wobei benutzt wurde, daß D unitär ist, d.h. $D^+ D = id$ bzw. $D^+ = D^{-1}$.

Wir haben gerade gesehen, daß C_l eine “gute” physikalische Größe ist. Die Analyse zeigt



Man sieht charakteristische Strukturen. Es bedarf einer Theorie zur Entstehung bzw. der Dynamik des frühen Universums, um diese Strukturen zu verstehen oder umgekehrt, die Daten sind ein Prüfstein für die Theorie. Wir wollen aber festhalten, daß das Maximum bei $l \sim 200$ bedeutet, daß ein großer Teil der Temperaturschwankung mit Funktionen aufgelöst werden kann, die ca. 200 Extrema bei Umlauf um einen Großkreis besitzen. Dies bedeutet, daß die typische Ausdehnung eines dunklen (hellen) Flecks $360/200 = 1,8$ Grad beträgt.

3.2.5 Nachtrag zu Kugelflächenfunktionen

A) Mit den Überlegungen des letzten Abschnittes, d.h. der Benutzung des Projektors P_l im Raum der θ, ϕ -abhängigen Funktionen auf den Eigenraum zu \vec{L}^2 mit Eigenwert $l(l+1)$, können wir auch die Identität (3.94) leicht herleiten. Hierbei handelt sich weniger um eine Rechen- als um eine Argumentations-Leistung. (Siehe auch die grundsätzlich flankierende Übungsaufgabe 11.1.)

Seien ψ und ψ' zwei Funktionen, die auf der 2-dimensionalen Sphäre einen Massenpunkt des Gewichtes 1 und der Lage bei $\Omega = (\theta, \phi)$ bzw. $\Omega' = (\theta', \phi')$ beschreiben. (Mehr zu derartigen “Dirac-Delta-Funktionen” im nächsten Kapitel.) Sei Φ eine stetige Funktion auf der 2-dimensionalen

Sphäre, dann gilt beispielsweise

$$\langle \psi | \Phi \rangle = \int_{S^2} d\Omega \psi^*(\Omega) \Phi(\Omega) = \Phi(\theta, \phi), \quad \text{und} \quad \langle \Phi | \psi \rangle = \Phi^*(\theta, \phi), \quad (3.105)$$

und analoges für ψ' .

Wir betrachten die Größe $\langle \psi | P_l \psi' \rangle^3$ und gehen wie in (3.103) vor

$$\langle \psi | P_l \psi' \rangle = \sum_{m=-l}^l \langle \psi | P_{l,m} \psi' \rangle = \sum_{m=-l}^l \langle \psi | Y_{l,m} \rangle \langle Y_{l,m} | \psi' \rangle = \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta', \phi'). \quad (3.106)$$

Nun wollen wir (wie im vorherigen Abschnitt) die Invarianz des Projektors P_l unter Drehungen in \mathbb{R}^3 ausnutzen. Wir können durch ein Element aus $O(3)$ den Einheitsvektor in Richtung (θ', ϕ') auf $(0, 0)$ und gleichzeitig den in Richtung (θ, ϕ) auf $(\gamma, 0)$ abbilden, wobei γ der invariante Winkel zwischen den betrachteten Einheitsvektoren ist. Sei D die Wirkung (Darstellung) der betrachteten Drehung im Funktionenraum. Es gilt

$$P_l = D^+ P_l D \quad \Rightarrow \quad \langle \psi | P_l \psi' \rangle = \langle \psi | D^+ P_l D \psi' \rangle = \langle (D\psi) | P_l (D\psi') \rangle = \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\gamma, 0) Y_{l,m}^*(0, 0), \quad (3.107)$$

da die Funktionen $D\psi$ und $D\psi'$ nun Masspunkte bei $(\gamma, 0)$ und $(0, 0)$ beschreiben. In der Summe sind die meisten Terme gleich null, da $Y_{l,m}^*(0, 0) = 0$ für $m \neq 0$. Daher erhalten wir

$$\langle \psi | P_l \psi' \rangle = Y_{l,0}(\gamma, 0) Y_{l,0}^*(0, 0) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma) P_l(1). \quad (3.108)$$

Überzeugen Sie sich davon, daß (3.80) $P_l(1) = 1$ liefert (es zählen nur Beiträge, bei denen jeder $(x^2 - 1)$ -Faktor genau einmal abgeleitet wird; es gibt $l!$ -viele Terme dieser Art, die sich zu 2^l auswerten). Mit (3.108) und (3.106) folgt

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta', \phi') \quad (3.109)$$

also (3.94).

B) Wir wollen nun auch noch (3.93) beweisen. Den Hauptteil erledigen Sie in Übungsaufgabe 11.2. Dort zeigen Sie

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) u^n, \quad (3.110)$$

mit gewissen (reellen) Koeffizienten c_n . Man braucht nun nur noch $x = 1$ einzusetzen, so daß wegen $P_n(1) = 1$

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n. \quad (3.111)$$

³Bitte diese Projektoren $P_{l,m}$ und P_l nicht mit den Legendre-Polynomen und assoziierten Legendre-Funktionen $P_l(x)$ und $P_l^m(x)$ verwechseln.

Nun ist aber die Reihenentwicklung der linken Seite einfach die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$, so daß der Vergleich $c_n = 1$ liefert.

C) Die Orthogonalität und Normierung der Legendre-Polynome lautet

$$\int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1}, \quad (3.112)$$

wobei die Orthogonalität klar ist (Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten von \vec{L}^2), aber die Normierung noch zu zeigen ist. Wir quadrieren die Gleichung (3.110) mit $c_n = 1$ und integrieren über $x \in [-1, 1]$, wobei wir die Orthonormiertheit der Legendre-Polynome benutzen

$$\int_{-1}^1 dx \frac{1}{1-2ux+u^2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} u^{n+m} \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x)}_{=0 \text{ für } n \neq m} = \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n} \int_{-1}^1 dx P_n^2(x). \quad (3.113)$$

Das Integral auf der linken Seite ist

$$\int_{-1}^1 dx \frac{1}{1-2ux+u^2} = -\frac{1}{2u} \log(1-2ux+u^2) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{1}{u} \log \frac{1+u}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} u^{2n}. \quad (3.114)$$

Der Vergleich der Ausdrücke (3.113,3.114) liefert (3.112).

Mit C) ist die Orthogonalität und Normierung der $Y_{l,0}$ -Funktionen gezeigt. Die Orthogonalität und Normierung aller $Y_{l,m}$ -Funktionen folgt "einfach" mittels Operationen, die die Auf- und Absteiger L^{\pm} benutzen. Wir kommen hierauf evtl. in der TP3 "Quantenmechanik" zurück.

3.2.6 Anwendungen in der Elektrodynamik

Wir betrachten nun Strahlung in der Elektrodynamik, also Lösungen der Wellengleichung im ladungsfreien Raum

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi = 0. \quad (3.115)$$

Die Lösungen zu dieser Gleichung sind die (Überlagerungen von) ebenen Wellen

$$e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \quad (3.116)$$

mit der Bedingung

$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (3.117)$$

Wenn wir monochromatische Wellen, also mit festem ω betrachten, gibt es immer noch "viele" Lösungen, nämlich Überlagerungen von ebenen Wellen mit Wellenvektor \vec{k} beliebiger Richtung, aber fester Länge $k = \omega/c$.

Zwischenfazit: Die ebenen Wellen sind simultane Eigenfunktionen zu

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.118)$$

und dann natürlich auch Eigenfunktionen zum Laplaceoperator mit Eigenwert $-k^2$.

Im Prinzip ist mit den ebenen Wellen alles gesagt. Das Leben wird schwieriger, wenn wir Materie hinzufügen. Eine Standardsituation ist gegeben, wenn eine ebene Wellen mit wohldefinierten \vec{k}, ω auf ein kleines Hindernis, z.B. ein Atom trifft und elastische Streuung stattfindet: das vom Atom emittierte Strahlungsfeld hat immer noch die Zeitabhängigkeit wie durch ω gegeben (d.h. die zugehörigen Photonen haben die gleiche Energie wie die einfallenden: $\hbar\omega$). Das Streufeld kann aber grundsätzlich aus einer Überlagerung von allen Wellen zu Wellenvektoren \vec{k} mit festem Betrag ($= \omega/c$), aber beliebiger Richtung bestehen. Ferner ist die Überlagerung dieser ebenen Wellen eine Funktion, die bei zunehmendem Abstand einen charakteristischen Abfall zeigt, der nicht durch einfaches Hinschauen auf die Fourierentwicklungskoeffizienten zu sehen ist. Es gibt zu diesem Problem ein adaptiertes Funktionensystem, bei dem

$$\Delta, \vec{L}^2, L_z, \quad (3.119)$$

simultan diagonalisiert werden. Bei dem genannten Streuproblem treten häufig im Streufeld nur wenige Funktionen dieses Typs auf. Wir ignorieren ab jetzt (wieder) die gleichartige Zeitabhängigkeit aller Funktionen und betrachten die Ortsabhängigkeit.

Wir benutzen nun (3.86) und schreiben den (negativen) Eigenwert als $-k^2$ und die Eigenfunktion als $\psi = f(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$

$$\Delta\psi = -k^2\psi \quad (3.120a)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - l(l+1) \right) f(r)Y_{l,m} = -k^2 f(r)Y_{l,m}. \quad (3.120b)$$

Die verbleibende Differentialgleichung ist unabhängig von m und betrifft nur die r -Abhängigkeit der Funktion, also den Radialanteil $f(r)$, so daß wir auch schreiben können

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - l(l+1) \right) f = -k^2 f. \quad (3.121)$$

Der Operator auf der linken Seite hat die eigentümliche Eigenschaft, homogen zu sein. Dies soll heißen: unter einer Variablensubstitution $\rho = kr$ bleibt der Operator formgleich, wird aber mit einem konstanten Faktor multipliziert, nämlich mit k^2

$$\frac{k^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - l(l+1) \right) f = -k^2 f. \quad (3.122)$$

Wir teilen nun durch k^2 und bringen alles auf eine Seite

$$\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) f = 0. \quad (3.123)$$

Dies ist die DGL der *sphärischen Zylinderfunktionen*. Es gibt zwei unabhängige Lösungen, die *sphärische Bessel-* und die *sphärische Neumann-Funktion*

$$j_l(\rho) \quad \text{und} \quad n_l(\rho), \quad (3.124)$$

wobei die Lösung j_l (n_l) bei $\rho = 0$ regulär (singulär) ist und folgende Asymptotik hat

$$j_l(\rho) \simeq \begin{cases} \rho^{-1} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{2}l\right), & \rho \rightarrow \infty, \\ \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, & \rho \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.125)$$

Hier bezeichnet $(2l+1)!!$ das Produkt $(2l+1) \cdot (2l-1) \dots 3 \cdot 1$.

Die Funktionen $j_l(\rho)$ sind “elementare Funktionen”, der Form

$$j_l(\rho) = g_l(\rho) \sin \rho + (-1)^{l+1} g_{-l-1}(\rho) \cos \rho, \quad (3.126)$$

deren Bestandteile sich aus Rekursionsformel und Anfangsbedingungen

$$g_{l+1}(\rho) + g_{l-1}(\rho) = \frac{2l+1}{\rho} g_l(\rho) \quad (3.127a)$$

$$g_0(\rho) = \frac{1}{\rho}, \quad g_{-1}(\rho) = 0, \quad (3.127b)$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$ ergeben. Was ist die Bedeutung der $j_l(\rho)$ mit negativen Indizes? Wir bemerken, daß $j_l(\rho)$ und $j_{-l-1}(\rho)$ dieselbe DGL erfüllen, aber linear unabhängig sind. Dies liefert (bis auf das Vorzeichen)

$$n_l(\rho) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(\rho). \quad (3.128)$$

Wir brauchen in vielen Fällen von Streuproblemen der Quantenmechanik nur die $j_l(\rho)$ mit nicht-negativen Indizes.

Wir erhalten die Bessel DGL, indem wir ersetzen

$$j_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \cdot Z_{l+\frac{1}{2}}(\rho). \quad (3.129)$$

Für die Funktion $Z_\nu(\rho)$ (hier mit $\nu = l + 1/2$) erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + 1 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) Z_\nu(\rho) = 0, \quad (\text{Bessel DGL}) \quad (3.130)$$

mit Lösungen *Bessel-* und *Neumann-Funktion*

$$J_\nu(\rho) \quad \text{und} \quad N_\nu(\rho). \quad (3.131)$$

Der Zusammenhang mit den “sphärischen Funktionen” lautet

$$j_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \cdot J_{l+\frac{1}{2}}(\rho), \quad \text{und} \quad n_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \cdot N_{l+\frac{1}{2}}(\rho). \quad (3.132)$$

3.3 Distributionen

Wir wollen hier singuläre Objekte wie punktförmige Massen- und Ladungsverteilungen in mehr- oder minder sauberer konzeptioneller Weise erfassen. Man findet im Zusammenhang mit der Lösung von (partiellen) Differentialgleichungen das Konzept der Greenschen Funktion, die als Lösung zu einer punktförmigen Quelle (Kraftstoß, punktförmige Ladung usw.) aufgefaßt werden kann. Wir haben es aber geschafft, diese Sichtweise zu vermeiden, indem wir vollständig reguläre Objekte, nämlich kontinuierliche Ladungsverteilungen benutzt haben, wobei wir von Anfang an mit Konvolutionsintegralen arbeiten mußten. Aber die allgemeine Ladungsverteilung, mit der man arbeiten muß, mag auch punktförmige Objekte enthalten.

Eine andere Anwendung hatten wir im Abschnitt 3.2.5 “Nachtrag zu Kugelflächenfunktionen” kennengelernt. Auch das hätten wir vermeiden können, aber hier holen wir nach, was sich hinter den Konzepten “Distribution”, “Testfunktion” und beispielsweise “Dirac-Deltafunktion” verbirgt. Hinter diesen Konzepten verbirgt sich durchaus die physikalische Realität, daß das Ausmessen von Verteilungen von irgendwelchen Objekten/Größen mit Meßinstrumenten nicht punktförmig möglich ist, sondern mit einer endlichen, wenn auch wohl immer besseren Auflösung geschieht. So werden Verteilungen bzw. “Distributionen” mit mehr oder minder lokalen “Testfunktionen” ausgeprobt bzw. getestet.

Die generelle Idee basiert auf folgender Beobachtung. Wir betrachten Funktionen auf \mathbb{R}^n oder einer offenen Teilmenge davon. Sei g eine derartige Funktion, dann ist auf dem (Teil-) Raum der Funktionen f , für die das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) f(x) \quad (3.133)$$

wohldefiniert ist, eine lineare Abbildung auf dem Funktionenraum in die komplexen Zahlen definiert, ein sogenanntes *Funktional*. Wir mögen dieses Funktional G nennen, so daß

$$G : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) f(x) \in \mathbb{C}. \quad (3.134)$$

Es mag aber auch Funktionale T geben, die auf einem Teilraum aller Funktionen $f(x)$ definiert sind, also linear sind

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2) \in \mathbb{C}, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ Konstante}) \quad (3.135)$$

aber nicht als Integral geschrieben werden können. Dazu gehört die “Dirac-Distribution” δ_r , definiert durch

$$\delta_r(f) = f(r), \quad (3.136)$$

d.h. das Funktional δ_r bildet die Funktion f auf eine Zahl ab, die gegeben ist durch den Funktionswert von f bei r . Bemerkung: (i) in Anwendungen ist diese Distribution nur “sinnvoll”, wenn $f(x)$ bei r stetig ist, (ii) man ist versucht, für stetige $f(x)$ die Dirac-Distribution durch die “Dirac-Deltafunktion” $\delta^n(x)$ (überall 0, außer bei $x = 0$, Gesamtintegral gleich 1) zu realisieren. Dann würde gelten

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \delta^n(x - r) f(x) = f(r) \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \delta^n(x - r) = f(r) \cdot 1 = f(r). \quad (3.137)$$

Aber offensichtlich ist dieses $\delta^n(x)$ keine “richtige Funktion”. Bestenfalls kann die Wirkung der Distribution δ_r durch eine Folge “richtiger Funktionen” approximiert werden (Funktionen, die immer schärfer um $x = 0$ lokalisiert sind). Und mit dieser Vorstellung kann man gut arbeiten. Alle mathematischeren bzw. rigoroseren Formulierungen müssen hiermit kompatibel sein.

In diesem Abschnitt soll Ihnen gezeigt werden, wie mit Objekten, die keine “richtigen Funktionen” sind in Form von Distributionen gearbeitet werden kann. Die Strategie ist folgende: (i) (fast) jede “richtige Funktion” kann als “Distribution” aufgefaßt werden, der Raum aller “Distributionen” ist aber viel größer; (ii) mathematisch und physikalisch wohldefinierte Gleichungen werden gelöst, indem hilfsmäßig Gleichungen im Distributionssinn gelöst werden, (iii) das physikalische Objekt wird als Distribution gefunden und die sich dahinter verbergende “richtige Funktion” identifiziert.

Den Distributionen liegen (zwei) Räume von sogenannten *Testfunktionen* zu Grunde.

Definition 3.4. Der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Zu Grunde gelegt wird die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die einen kompakten Träger haben $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, d.h. außerhalb einer kompakten Menge null sind.

Wir fordern folgenden Konvergenzbegriff (Topologie): Eine Funktionenfolge ϕ_j in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergiere gegen ein Element ϕ in dieser Menge, wenn wir gleichmäßige Konvergenz der Funktionen und aller Ableitungen bzgl. der Supremumsnorm haben

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (\phi_j(x) - \phi(x)) \right\|_\infty = 0, \quad (3.138)$$

wobei α ein beliebiger Multiindex ist und den Grad einer beliebig hohen, gemischten Ableitung bezeichnet.

Definition 3.5. Die schnell fallenden Funktionen bzw. der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Zu Grunde gelegt wird die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die selbst sowie alle ihre Ableitungen beliebigen Grades schneller im Unendlichen abfallen als die Kehrwerte beliebiger Polynome. Soll heißen: wir verlangen von einer derartigen Funktion ϕ , daß die Supremumsnorm endlich ist

$$\left\| x^\beta \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \phi \right\|_\infty < \infty \quad (3.139)$$

für alle Multiindizes α und β .

Man führt eine geeignete Topologie ein.

Die Menge $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt (dicht) in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (3.140)$$

Der Raum der *Distributionen* wird als Dualraum zum Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert und mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Dies ist die Menge aller stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, oder mit anderen Worten, der linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in die komplexen Zahlen mit endlicher Norm.

Nachtrag: Die Norm $\|A\|$ einer linearen Abbildung A ist die kleinste Zahl $a \in \mathbb{R}_0^+$, für die $\|Ax\| \leq a \|x\|$ gilt.

Stetigkeit von linearen Abbildungen ist äquivalent zur Endlichkeit der Norm.

Achtung: nur in endlichdimensionalen Räumen folgt aus Linearität schon Beschränktheit.

Der Raum der *temperierten Distributionen* wird als Dualraum zum Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert und mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Dies ist die Menge aller stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wegen (3.140) gilt

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (3.141)$$

Beachte, daß die Nichtgleichheit dieser Mengen ein Resultat der unendlichen Dimension der “beteiligten” Räume ist und wir Stetigkeit der linearen Funktionale fordern.

Beispiel(e) 3.6. (Reguläre Distributionen)

Durch stetige Funktionen $g \in C(\mathbb{R}^n)$ erzeugte Distributionen T_g

$$T_g(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x)\phi(x) \in \mathbb{C}. \quad (3.142)$$

Hier knüpfen wir an unsere Einleitung an. Wir können hier aber Spezifischeres zum Definitionsbereich sagen. In (3.142) sind alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ erlaubt. Falls (3.142) für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ erlaubt sein soll, darf g nicht zu schnell wachsen. Daher werden generell die Elemente in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *langsam wachsende Distributionen* genannt, oder mit mehr Fremdworten: *temperierte Distributionen*.

Bemerkung: (i) Die Dirac-Distribution ist keine reguläre Distribution, also per definitionem eine “singuläre Distribution”. (ii) Wir werden Gleichungen für “ordentliche Funktionen” als Distributionen lösen. Die verbleibende Aufgabe ist, eine Distribution T als ein T_g mit eindeutigen g zu identifizieren.

Operationen auf Distributionen

Die Distributionsräume $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sind Vektorräume und daher sind Addition und Multiplikation mit komplexen Zahlen per se definiert.

Multiplikation mit einer Funktion

Sei T eine Distribution, f eine beliebige Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren das Produkt fT als Distribution durch die Operation auf eine beliebige Testfunktion ϕ

$$(fT)(\phi) := T(f\phi), \quad (3.143)$$

was wohldefiniert ist, da $f\phi$ eine Testfunktion ist.

Differentiation

Sei T eine Distribution, dann definieren wir die Ableitung von T , genannt $\partial_x T$, durch die Operation auf eine beliebige Testfunktion ϕ

$$(\partial_x T)(\phi) := -T(\partial_x \phi). \quad (3.144)$$

Es liegt Wohldefiniertheit vor, da auch $\partial_x \phi$ eine Testfunktion ist. Die Verallgemeinerung auf beliebig hohe, gemischte Ableitungen ist offensichtlich.

Im Falle von regulären Distributionen liefern die obigen Definitionen gerade die üblichen Resultate. Sei also $T = T_g$ mit einer stetigen bzw. differenzierbaren Funktion g . Es gilt

$$(fT_g)(\phi) = T_g(f\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) f(x) \phi(x) = T_{fg}(\phi), \quad (3.145)$$

und

$$(\partial_x T_g)(\phi) = - \int_{\mathbb{R}^n} d^n x g(x) \partial_x \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x [\partial_x g(x)] \phi(x) = T_{\partial_x g}(\phi), \quad (3.146)$$

wobei nach dem zweiten Gleichheitszeichen eine partielle Integration durchgeführt wurde und der Oberflächenterm null ist. Man sieht, daß auch $\partial_x g$ im Distributionssinn definiert ist, selbst wenn g als Funktion nicht differenzierbar ist.

Beispiel(e) 3.7. Ein “extremer Fall” von Nichtdifferenzierbarkeit als Funktion liegt bei der “Dirac-Deltafunktion” $\delta^n(x)$ bzw. der Dirac-Distribution vor. Natürlich ist δ_r differenzierbar

$$(\partial_x \delta_r)(\phi) = -\delta_r(\partial_x \phi) = -(\partial_x \phi)(r). \quad (3.147)$$

Beispiel(e) 3.8. Die “Dirac-Deltafunktion” $\delta(x)$ bzw. die Dirac-Distribution im Eindimensionalen ist selbst eine Ableitung und zwar der Heaviside-Sprungfunktion Θ mit $\Theta(x) = 0$ bzw. 1 für $x < 0$ bzw. $x \geq 0$.

$$(\partial_x T_\Theta)(\phi) = -T_\Theta(\partial_x \phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta(x) \phi'(x) = - \int_0^{\infty} dx \phi'(x) = -\phi(x)|_0^{\infty} = \phi(0), \quad (3.148)$$

wobei wir integriert und benutzt haben, daß $\phi(x)$ bei ∞ null ist.

Fouriertransformation

Wir hatten für Funktionen f aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ definiert

$$\mathcal{F}[f](k) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{-ikx} f(x), \quad (3.149a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) := \int_{-\infty}^{\infty} d^n k e^{ikx} f(k). \quad (3.149b)$$

Sei f nicht nur aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, sondern stetig und auch $\mathcal{F}[f]$ stetig, so gilt für jede Testfunktion ϕ

$$T_{\mathcal{F}[f]}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \mathcal{F}[f](k) \phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-ikx} f(x) \phi(k) \quad (3.150a)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x) \mathcal{F}[\phi](x) = T_f(\mathcal{F}[\phi]). \quad (3.150b)$$

Unter den genannten Voraussetzungen ergibt diese Identität Sinn, wenn Folgendes beachtet wird. Laut (3.142) soll das Argument von T_f eine Testfunktion sein. Falls wir voraussetzen,

daß $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so liegt $\mathcal{F}[\phi]$ nicht mehr in diesem Raum, aber in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Interessanterweise liegt auch für ϕ in dem größeren Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $\mathcal{F}[\phi]$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist also invariant unter der Fourier-Transformation.

Wir arbeiten daher von nun an mit dem größeren Raum an Testfunktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und mit dem kleineren Raum an temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren für temperierte Distributionen T die Fouriertransformation $\mathcal{F}[T]$ über

$$\mathcal{F}[T](\phi) := T(\mathcal{F}[\phi]), \quad (3.151)$$

so daß

$$\mathcal{F}[T_f] = T_{\mathcal{F}[f]}. \quad (3.152)$$

Soviel zur ‘‘Rechtfertigung’’ der Definition (3.151): die Fourier-Transformation einer Funktion liefert dasselbe, gleichgültig ob sie als Funktion oder als (reguläre) Distribution aufgefaßt wird.

Beispiel(e) 3.9. Die Fourier-Transformation der Delta-Distribution δ_r ist die Exponentialfunktion E_r

$$E_r(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-irk}, \quad (3.153)$$

denn

$$\mathcal{F}[\delta_r](\phi) = \delta_r(\mathcal{F}[\phi]) = \mathcal{F}[\phi](r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n k e^{-ikr} \phi(k) = T_{E_r}(\phi). \quad (3.154)$$

Insbesondere ist die FT der Delta-Distribution δ_0 die konstante Funktion mit Wert $\frac{1}{(2\pi)^n}$. (Je nach Normierung der FT kann die Konstante auch schlicht 1 sein.)

Beispiel(e) 3.10. Die Fourier-Transformation der ebenen Welle bzw. Exponentialfunktion

$$\tilde{E}_k(x) = e^{ikx}, \quad (3.155)$$

ist die Delta-Distribution

$$\mathcal{F}[T_{\tilde{E}_k}] = \delta_k, \quad (3.156)$$

denn

$$\mathcal{F}[T_{\tilde{E}_k}](\phi) = T_{\tilde{E}_k}(\mathcal{F}[\phi]) = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x e^{ikx} \mathcal{F}[\phi](x) = (\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})[\phi](k) = \phi(k) = \delta_k(\phi), \quad (3.157)$$

wobei wir die Eigenschaften der Hin- und Rücktransformationen vom Fourier-Typ für ‘‘ordentliche Funktionen’’ benutzt haben.

Bemerkung: In der Physik drehen wir diese gerade durchgeführte Überlegung traditionell um. Der Physiker-Beweis, daß die Operationen \mathcal{F} und \mathcal{F}^{-1} zueinander invers sind, wird mit der Beobachtung geführt, daß die FT der ebenen Wellen die Delta-Funktion liefert.

Lösung von linearen partiellen DGL

Wir hatten schon die Poisson (-artige) Gleichung

$$(-\Delta + m^2)V(x) = 4\pi\rho(x), \quad (3.158)$$

gelöst. Wir wollen dies hier erneut durchführen und auf den ersten Blick ein wenig kompakter als im ersten Teil von Abschnitt 2.7.1 leisten. Wir werden außerdem die Rechnungen mit “Delta-Distributionen” in Physiker-Manier durchführen und erst weiter unten Elemente mathematischer Rigorosität einflechten.

Wir stellen uns vor, daß die Ladungsdichte $\rho(x)$ aus Ladungspunkten aufgebaut ist (diskret oder kontinuierlich). Wenn wir die Lösung $G(x; y)$ zu einer Punktladung der Größe 1 und beliebiger Lage y finden

$$(-\Delta + m^2)G(x; y) = 4\pi\delta^3(x - y), \quad (\Delta \text{ wirke auf } x), \quad (3.159)$$

dann können wir wegen der Linearität des Differentialoperators durch geeignete Überlagerung der $G(x; y)$ mit verschiedenen y -Werten, d.h. durch ein Integral

$$V(x) = \int d^3y G(x; y)\rho(y) \quad (3.160)$$

eine allgemeine Lösung angeben. Da ferner der Differentialoperator translationsinvariant ist (Funktion erst ableiten, dann verschieben = Funktion verschieben, dann ableiten), suchen wir eine Funktion $G(x; y)$, die nur von der Differenz der Argumente abhängt: “ $G(x; y) = G(x - y)$ ”. Für diese Funktion G mit einem Argument brauchen wir nur zu lösen

$$(-\Delta + m^2)G(x) = 4\pi\delta^3(x). \quad (3.161)$$

Lösung mittels Fourier-Transformation für Distributionen

Wir nehmen die Fourier-Transformation beider Seiten und wenden die üblichen Rechenregeln an, d.h. $\nabla \rightarrow ik$, und (3.154) für $n = 3$ wobei das Argument r hier x heiße

$$(k^2 + m^2)\tilde{G}(k) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} e^{-ikx}. \quad (3.162)$$

Wir sind etwas salopp vorgegangen, wobei wir die Distribution G als Funktion $G(x)$ betrachtet haben (sonst wäre die gesamte Mühe ja auch nutzlos) und somit eine Funktion $\tilde{G}(k)$ als Fourier-Transformierte hat. Wie man streng im Distributionssinn die Fourier-Transformierte einer abgeleiteten Distribution zu behandeln hat, ist im Anhang gezeigt. Wir erleichtern uns aber das Leben mit dem pragmatischen Zugang. Mit (3.162) finden wir direkt das bekannte Zwischenergebnis (2.109) oder explizit

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2 + m^2}, \quad (3.163)$$

wobei diese Funktion tatsächlich FT-rcktransformierbar ist, wie wir schon gesehen haben. Das Ergebnis ist

$$G(x) = \frac{e^{-m|x|}}{|x|}. \quad (3.164)$$

Diese Rechnung ist eigentlich nicht einfacher als die in Abschnitt 2.7.1. Wir haben allerdings das Konzept einer punktförmigen Ladung sauber umsetzen können und auf diesem Wege das von ihr erzeugte Potential $G(x)$ als reguläre Distribution bzw. “normale Funktion” hergeleitet.

“Unabhängiger Beweis” der Lösung im Distributionssinn

Wir haben gezeigt, daß

$$(-\Delta + m^2)G(x) = 4\pi\delta^3(x), \quad \text{mit} \quad G(x) = \frac{e^{-m|x|}}{|x|}. \quad (3.165)$$

Die Funktion $G(x)$ ist eine “normale Funktion”, wenn auch mit einer Singularität bei $x = 0$, die immerhin integrierbar ist (in 3d). Die Anwendung des Differentialoperators kann nur außerhalb dieser Singularität als Funktion verstanden werden. Wir wollen zeigen, daß beide Seiten im Distributionssinn, also mit Testfunktionen geprobt gleich sind. Eigentlich müßte (3.165) als

$$(-\Delta + m^2)T_G = 4\pi\delta_0. \quad (3.166)$$

geschrieben werden.

Wir wenden beide Seiten auf eine beliebige Testfunktion $\phi(x)$ an. Die rechten Seiten von (3.165) bzw. (3.166) liefern natürlich

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, 4\pi\delta^3(x)\phi(x) = 4\pi\phi(0), \quad \text{bzw.} \quad 4\pi\delta_0(\phi) = 4\pi\phi(0). \quad (3.167)$$

Wir wenden nun die linke Seite von (3.165) auf $\phi(x)$ an und benutzen die üblichen Rechenregeln wie partielle Integration

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, [(-\Delta + m^2)G(x)]\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, G(x)(-\Delta + m^2)\phi(x), \quad (3.168)$$

wobei wir die rechte Seite auch wegen der Definitionsregeln für Ableitungen von Distributionen direkt hätten hinschreiben können bzw. sollen

$$((-\Delta + m^2)T_G)(\phi) = T_G((-\Delta + m^2)\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, G(x)(-\Delta + m^2)\phi(x). \quad (3.169)$$

Und genau diese rechten Seiten von (3.168) und (3.169) Seite sind wohldefiniert, da der Laplace-Operator auf eine Testfunktion angewendet wieder eine Testfunktion ergibt und die Funktion $G(x)$ bei $x = 0$ zwar eine Singularität besitzt, diese aber integrierbar ist (in 3d). Wir wollen zeigen, daß das Integral unabhängig von der Testfunktion $\phi(x)$ immer $4\pi\phi(0)$ liefert.

Als besonders geeignet werden sich wieder Kugelkoordinaten r, θ, φ und die Darstellung des Laplace-Operators darin (3.49) erweisen. Der Grund liegt darin, daß die Funktion $G(x)$ in diesen Koordinaten zu e^{-mr}/r also unabhängig von θ und φ wird, so daß sich die Integration bzgl. der Winkel schnell durchführen läßt. Das auszuführende Integral lautet nun

$$\int dr \, r^2 d\theta \, \sin \theta d\varphi \, \frac{e^{-mr}}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2 \right) \phi. \quad (3.170)$$

Das Integral über den 3. Summanden läßt sich am schnellsten ausführen, da

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (3.171)$$

Das Integral über den 2. Summanden läßt sich fast genauso schnell ausführen

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \phi = \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \phi \Big|_0^\pi = 0. \quad (3.172)$$

Von (3.170) verbleiben nur zwei Terme im Integranden

$$\int dr r^2 d\theta \sin\theta d\varphi \frac{e^{-mr}}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + m^2 \right) \phi = \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^{-mr}}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + m^2 \right) \phi, \quad (3.173)$$

wobei wir die $\Omega = (\theta, \varphi)$ -Integration über den gesamten Raumwinkel noch ausführen müssen.

Nun schreiben wir das innere Integral (“ r -Integral”) durch Zusammenfassen der Terme im Integranden als

$$\int_0^\infty dr e^{-mr} \left(-2 \frac{\partial}{\partial r} - r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + rm^2 \right) \phi. \quad (3.174)$$

Wir wenden auf den 2. Term eine partielle Integration an

$$\int_0^\infty dr (-re^{-mr}) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi = -re^{-mr} \frac{\partial}{\partial r} \phi \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dr (1 - mr) e^{-mr} \frac{\partial}{\partial r} \phi, \quad (3.175)$$

wobei der Oberflächenterm null ist. Das Integral (3.174) nimmt nun die Form

$$\int_0^\infty dr e^{-mr} \left(-\frac{\partial}{\partial r} - mr \frac{\partial}{\partial r} + m^2 r \right) \phi, \quad (3.176)$$

an. Der 1. Term liefert nach partieller Integration

$$\int_0^\infty dr e^{-mr} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right) \phi = \underbrace{-e^{-mr} \phi \Big|_0^\infty}_{=\phi(0)} + \int_0^\infty dr (-m) e^{-mr} \phi. \quad (3.177)$$

Der 2. Term liefert

$$\int_0^\infty dr mre^{-mr} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \right) \phi = \underbrace{-mre^{-mr} \phi \Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty dr (m - m^2 r) e^{-mr} \phi. \quad (3.178)$$

Dies alles in (3.176) eingesetzt liefert letztendlich

$$\dots = \phi(0), \quad (3.179)$$

was über den gesamten Raumwinkel integriert $4\pi\phi(0)$ ist. Dies beweist (3.165), wenn auch etwas umständlich.

Deutung/Probe der Singularitäten im Distributionssinn

Wir haben nun zweimal unabhängig gezeigt, daß

$$(-\Delta + m^2)G(x) = 4\pi\delta^3(x), \quad \text{mit} \quad G(x) = \frac{e^{-m|x|}}{|x|}. \quad (3.180)$$

Ein pragmatischer Beweis erfolgt so: (i) man zeige zunächst, daß außerhalb der Singularität bei $x = 0$ die linke Seite 0 liefert, (ii) man zeige, daß bei $x = 0$ eine Deltafunktion mit Gewicht 4π vorliegt, indem man über eine (kleine) Kugel $K_\epsilon(0)$ zentriert um 0 mit Radius ϵ integriere, wobei die “üblichen” Rechenregeln befolgt werden.

Wir ersparen uns Schritt (i), da dies elementar möglich ist. Für Schritt (ii) werten wir das Integral aus

$$\int_{K_\epsilon(0)} d^3x (-\Delta + m^2)G(x) = \int_{K_\epsilon(0)} d^3x (-\Delta)G(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.181a)$$

$$= - \int_{K_\epsilon(0)} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.181b)$$

$$= - \int_{S_\epsilon(0)} d\vec{A} \vec{\nabla} G(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.181c)$$

wobei wir den Gaußschen Satz angewendet haben und zum Schluß ein Flächenintegral über die Sphäre $S_\epsilon(0)$, d.h. die Oberfläche der besagten Kugel durchzuführen haben. Dieses Integral ist völlig singularitätenfrei. Wir finden für den Gradienten

$$\vec{\nabla} G(x) = -\frac{1}{|x|^2} \vec{e}_x + \mathcal{O}(\epsilon^{-1}), \quad \left(\vec{e}_x := \frac{x}{|x|} \right) \quad (3.182)$$

wobei \vec{e}_x der Einheitsvektor in Richtung des Ortsvektors ist. Das Integral in (3.181c) wertet sich nun zu

$$- (4\pi\epsilon^2) \left(-\frac{1}{\epsilon^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) = 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.183)$$

aus, wobei wir am Limes $\epsilon \rightarrow 0$ interessiert sind: 4π .

Rechenregeln Wir formulieren hier einige Rechenregeln im Eindimensionalen, bevor wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden

1. für eine stetige Funktion $f(x)$ gilt

$$f(x) \cdot \delta(x - x_0) = f(x_0) \cdot \delta(x - x_0), \quad (3.184)$$

2. für einen reellen Parameter a gilt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (3.185)$$

3. für eine reelle Funktion $f(x)$, die bei ihrer Nullstelle x_0 differenzierbar ist

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (3.186)$$

sowie offensichtliche Verallgemeinerungen zu Funktionen mit mehreren Nullstellen, wie

$$\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|a-b|} [\delta(x-a) + \delta(x-b)]. \quad (3.187)$$

4. Fourier-Transformation

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}. \quad (3.188)$$

5. Delta-Funktion für lokal holomorphe Testfunktionen

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) = 2\pi i \delta(x), \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(x), \quad (3.189)$$

und weiterhin

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\epsilon} = \text{PV} \left(\frac{1}{x} \right) \pm \pi i \delta(x), \quad (3.190)$$

wobei mit PV das Hauptwertintegral gemeint ist (principal value), also auf eine Funktion $\phi(x)$ angewendet

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right). \quad (3.191)$$

Beweis. Wir wollen die Rechenregeln kurz begründen.

1. für die stetige Funktion $f(x)$ und eine beliebige Testfunktion $\phi(x)$ gilt

$$\int dx \delta(x - x_0) f(x) \phi(x) = f(x_0) \phi(x_0) = \int dx \delta(x - x_0) f(x_0) \phi(x), \quad (3.192)$$

2. für den reellen Parameter a und eine beliebige Testfunktion $\phi(x)$ gilt (sei $\sigma := \text{sgn}(a)$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(ax) \phi(x) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} d(ax) \delta(ax) \phi(ax/a) = \frac{1}{a} \int_{-\sigma\infty}^{\sigma\infty} dy \delta(y) \phi(y/a) \quad (3.193a)$$

$$= \frac{\sigma}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) \phi(y/a) = \frac{1}{|a|} \phi(0) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \phi(x), \quad (3.193b)$$

3. für die reelle Funktion $f(x)$, differenzierbar bei ihrer Nullstelle x_0 folgt mit $y = f(x)$ und $dy = f'(x) dx$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(f(x)) \phi(x) = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx \delta(f(x)) \phi(x) = \int_{f(x_0-\epsilon)}^{f(x_0+\epsilon)} \frac{dy}{f'(f^{-1}(y))} \delta(y) \phi(f^{-1}(y)) \quad (3.194a)$$

$$= \frac{1}{|f'(f^{-1}(0))|} \phi(f^{-1}(0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \phi(x_0) \quad (3.194b)$$

$$= \frac{1}{|f'(x_0)|} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) \phi(x), \quad (3.194c)$$

wobei der Betrag nach dem ersten Gleichheitszeichen in (3.194b) erscheint, weil für Ableitung $f'(x_0) > 0$ (< 0) die Integralgrenzen $f(x_0 - \epsilon)$ kleiner (größer) und $f(x_0 + \epsilon)$ größer (kleiner) als 0 sind.

4. Fourier-Transformation: klar nach (3.156).
 5. Ein Beweis kann aufgebaut werden auf der Beobachtung, daß die Funktion

$$\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (3.195)$$

ein Gesamtintegral über ganz \mathbb{R} unabhängig von ϵ gleich π besitzt und für $x \neq 0$ gegen 0 geht, wenn $\epsilon \rightarrow 0^+$. Natürlich reicht punktweise Konvergenz nicht aus, um die Behauptung zu zeigen. Aber außerhalb einer Umgebung $[-\delta, \delta]$, wobei hier $\delta > 0$ eine kleine festgehaltene Zahl ist, liegt gleichmäßige Konvergenz vor etc. Wir werden aber gleich einen ganz anderen Beweis kennenlernen.

Aus (3.189) kann (3.190) mit

$$\frac{1}{x - i\epsilon} + \frac{1}{x + i\epsilon} = \frac{2x}{x^2 + \epsilon^2} \quad (3.196)$$

hergeleitet werden. Das Integral über die rechte Seite multipliziert mit einer Funktion $\phi(x)$ sollte das Hauptwertintegral liefern. Mit der folgenden Überlegung werden wir jedoch der Betrachtung von Funktionen in der Nähe ihrer Singularitäten entledigt.

Für eine in der Nähe von 0 holomorphe Testfunktion $f(x)$ reicht es zu zeigen

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) = 2\pi i f(0), \quad (3.197)$$

wobei δ eine kleine positive Zahl ist, derart daß die ganze Kreisscheibe mit Radius δ um 0 im Holomorphiebereich der Funktion $f(x)$ liegt. (Wir halten δ fest und lassen $\epsilon \rightarrow 0^+$ gehen.) Dann gilt die Aussage auch für ein größeres Integrationsintervall, da auf $\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$ die Beiträge im Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ wegfallen. Die Aussage (3.197) zeigen wir, indem wir nach Cauchy den geraden Integrationsweg von $-\delta$ zu δ zu Kreisbögen deformieren können, ohne das Integral abzuwandeln.

Für den ersten (zweiten) Summanden benutzen wir einen Halbkreisbogen \mathcal{C}_- (\mathcal{C}_+) in der unteren (oberen) Halbebene von $-\delta$ zu δ .

$$\int_{-\delta}^{\delta} dx f(x) \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) = \int_{\mathcal{C}_-} dx \frac{f(x)}{x - i\epsilon} - \int_{\mathcal{C}_+} dx \frac{f(x)}{x + i\epsilon} \quad (3.198a)$$

$$\longrightarrow \int_{\mathcal{C}_-} dx \frac{f(x)}{x} - \int_{\mathcal{C}_+} dx \frac{f(x)}{x} = \int_{\mathcal{C}} dx \frac{f(x)}{x} = 2\pi i f(0), \quad (3.198b)$$

wobei in der 2. Zeile der Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ einfach durchgeführt werden konnte, da der Integrand gleichmäßig stetig in ϵ ist: das Argument x bleibt weit genug, im Abstand δ , von 0 entfernt. Die beiden Halbkreisbögen (mit Minuszeichen für \mathcal{C}_+) fügen sich zu einem ganzen Kreisweg im positiven Sinn zusammen und zuletzt wurde die Cauchy-Integralformel benutzt.

□

Dieses Argument kann nun auch auf den Beweis von (3.190) angewendet werden

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{x \mp i\epsilon} = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dx \frac{\phi(x)}{x \mp i\epsilon} + \int_{[-\delta, \delta]} dx \frac{\phi(x)}{x \mp i\epsilon}, \quad (3.199)$$

wobei $\delta > 0$ wie oben ist. Die Gleichung gilt für festes δ und beliebige ϵ . Das zweite Integral können wir mit den Wegen \mathcal{C}_{\mp} umschreiben

$$\int_{[-\delta, \delta]} dx \frac{\phi(x)}{x \mp i\epsilon} = \int_{\mathcal{C}_{\mp}} dx \frac{\phi(x)}{x \mp i\epsilon}, \quad (3.200)$$

und dann gefahrlos den Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ nehmen

$$(3.199) \longrightarrow \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dx \frac{\phi(x)}{x} + \int_{\mathcal{C}_{\mp}} dx \frac{\phi(x)}{x}. \quad (3.201)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite liefert im $\delta \rightarrow 0^+$ Limes das Hauptwertintegral und das zweite Integral liefert für $\delta \rightarrow 0^+$ gerade $\pm \frac{1}{2}$ mal das volle Kreisintegral im positiven Sinn, also $\pm \frac{1}{2} 2\pi i \phi(0) = \pm \pi i \phi(0)$.

Rechenregeln im höherdimensionalen Fall

Sei A eine nicht-singuläre lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\delta^n(Ax) = |\det A|^{-1} \delta^n(x). \quad (3.202)$$

Wir beweisen dies mit der Substitutionsformel für Integrale von Funktionen auf \mathbb{R}^n .

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x \delta^n(Ax) \phi(x) = |\det A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} d^n y \delta^n(AA^{-1}y) \phi(A^{-1}y) \quad (3.203a)$$

$$= |\det A|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} d^n y \delta^n(y) \phi(A^{-1}y) = |\det A|^{-1} \phi(0). \quad (3.203b)$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit einer “Nullstelle” x_0 , d.h. $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$, und f sei differenzierbar bei x_0 mit nicht-singulärer ($n \times n$ -) Jacobi-Matrix $\partial f / \partial x$ bei x_0 . Es gilt

$$\delta^n(f(x)) = \left| \det \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \right) \right|^{-1} \delta^n(x - x_0). \quad (3.204)$$

Auch dies wird mit der Substitutionsformel für Integrale von Funktionen auf \mathbb{R}^n bewiesen, wobei wir auf Grund der Voraussetzungen annehmen können, daß $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 invertierbar ist.

Distributionen auf Mannigfaltigkeiten

Dies wird mit Hilfe von “Karten” auf Mannigfaltigkeiten auf den Fall von Distributionen auf (Teilmengen von) \mathbb{R}^n zurückgeführt.

4 Anhang

Theorem 4.1. (Fourier-Transformation der Ableitung einer Distribution)

Die Fourier-Transformierte von $\partial_j T$ mit $\partial_j = \partial_{x_j}$ ist

$$\mathcal{F}[\partial_j T](\phi) = (\partial_j T)(\mathcal{F}[\phi]) = -T(\partial_j \mathcal{F}[\phi]) = -T\left(x \mapsto \partial_j \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n k e^{-ikx} \phi(k)\right), \quad (4.1a)$$

$$= T\left(x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n k e^{-ikx} ik_j \phi(k)\right) = T(\mathcal{F}[k \mapsto ik_j \phi(k)]) \quad (4.1b)$$

$$= \mathcal{F}[T](k \mapsto ik_j \phi(k)) = i(\mathcal{F}[T] \circ M_j)(\phi), \quad (4.1c)$$

wobei M_j eine Funktion $k \mapsto \phi(k)$ auf die Funktion $k \mapsto k_j \phi(k)$ abbildet.

Literaturverzeichnis

M. Karbach, Mathematische Methoden der Physik, De Gruyter Studium, 2017

M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1970.

Handbook of Mathematical Functions, Verlag H. Deutsch, Frankfurt am Main, 1984.

F. Constantinescu, Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik, pb ed., Studienbücher, Teubner, Stuttgart, 1974.

J.W. Dettmann, Applied Complex Variables, Dover Publications, New York, 1965.

G. Fischer, Lineare Algebra, Grundkurs Mathematik, Vieweg, Wiesbaden, 1975.

W. Fischer and I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg Studium, Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden, 1985.

O. Forster, Analysis 1, Grundkurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden, 1976,

Analysis 2, Grundkurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden, 1984

Analysis 3, Vieweg Studium, vol. 3, Vieweg, Braunschweig Wiesbaden, 1984.

H. Heuser, Funktionalanalysis, Teubner Verlag, Stuttgart, 1986.

J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley, New York - Weinheim, 1998.

K. Königsberger, Analysis 1, Springer, Berlin - Heidelberg, 1990.

Serge Lang, Complex Analysis, Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer, New York, 1999.

Albert Messiah, Quantenmechanik, vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin, 1976.
Quantenmechanik, vol. 2, Walter de Gruyter, Berlin, 1976.

F. Oberhettinger, Tabellen zur Fouriertransformation, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. Band XC, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1957.

R. Remmert, Funktionentheorie I, Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1984.

F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Vorlesung über Funktionalanalysis, Verlag Harry Deutsch - Thun, Frankfurt, 1982.

J. Weidmann, Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teubner Verlag, Stuttgart, 1976.

E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis, fourth edition ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1902.