Übung 6 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2013

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 21.05.2013 Besprechung: 22.05.2013

1. **Γ-Funktion** (10)
   Die Funktion $\Gamma(z)$ sei gegeben durch

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

   mit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ und der Konstante γ.

   (a) Zeige, dass $\Gamma(z+1) = \Gamma(1)\, z\Gamma(z)$ gilt.

   (b) Wie muss man γ wählen, damit $\Gamma(1) = 1$ ist, also die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ gilt? Welcher numerische Wert ergibt sich hieraus für γ? Wieso kann $\Gamma(z)$ mit der Standard-Γ-Funktion identifiziert werden?

2. **Integral um einen Verzweigungsschnitt** (10)
   Betrachte die Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ mit einem Verzweigungsschnitt entlang der reellen Achse von -1 bis 1. Es soll das Integral entlang einer geschlossenen Kurve gegen den Uhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn, um den Verzweigungsschnitt herum auf zwei verschiedene Weisen berechnet werden.

   (a) Wähle als geschlossene Kurve einen Kreis mit großem Radius und schreibe die Funktion $f(z)$ wie folgt um:

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = z\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$$

   Benutze nun die Entwicklung der Wurzel $\sqrt{1-w} = 1 - \frac{w}{2} + \mathcal{O}\left(w^2\right)$ für betragsmäßig kleine $w \in \mathbb{C}$. Warum darf die Entwicklung an dieser Stelle abgebrochen werden?

   (b) Wähle als geschlossene Kurve ein Rechteck mit den Eckpunkten $(-1 - i\epsilon)$, $(1 - i\epsilon)$, $(1 + i\epsilon)$ und $(-1 - i\epsilon)$ und berechne den Limes $\epsilon \to 0$. Beachte hierbei dass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sqrt{(t \pm i\epsilon)^2 - 1} = \pm i\sqrt{1 - t^2}$$

   für alle $t \in [-1, 1]$ gilt.