

Übung 3 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2013

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 30.04.2013

Besprechung: 08.05.2013

1. Konservative Kraftfelder (10)

Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Kraftfeld mit

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

Wir interessieren uns im Folgenden für das Wegintegral von $\vec{F}(x, y)$ entlang kleiner Rechtecke.

- (a) Wie lässt sich ein Rechteck der Breite Δx und Höhe Δy , dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, parametrisieren? Lege hierzu die untere linke Ecke in den Punkt (x_0, y_0) und fertige eine Skizze an!
- (b) Benutze nun die Entwicklung

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y) &= \vec{F}(x_0, y_0) + (x - x_0) \left[\partial_x \vec{F}(x, y) \right]_{(x,y)=(x_0,y_0)} + (y - y_0) \left[\partial_y \vec{F}(x, y) \right]_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ &\quad + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2, (x - x_0)(y - y_0), (y - y_0)^2\right) \end{aligned}$$

um das geschlossene Wegintegral über $\vec{F}(x, y)$ entlang des kleinen Rechtecks aus Teil (a) näherungsweise zu berechnen!

- (c) Das Ergebnis aus Teil (b) sollte linear in der Fläche $\Delta x \Delta y$ des Rechtecks sein. Diskutiere den Vorfaktor für konservative Kraftfelder!

2. Integralformel von Cauchy (10)

Berechne mit Hilfe der Integralformel von Cauchy die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{1+2z},$$

(b)

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} dz \frac{\ln(1+z)}{1+z},$$

(c)

$$\int_{|z|=r} dz \frac{e^{z^2}}{(1+z)^3},$$

(d)

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^m (z-b)^n}, \quad m, n \geq 1.$$

Hinweis zu (c) und (d): Es muss eine Fallunterscheidung bezüglich r sowie m und n durchgeführt werden!