Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
– Physik –

Prof. Dr. A. Klümper
M. Brockmann
(G-16.04, 439-2541, michael.brockmann@physik.uni-wuppertal.de)

Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie
Sommersemester 2009

Aufgaben zur Vorbereitung der 2. Klausur

1. **Kurzfragen**

   (a) Definiere und interpretiere den Maxwellschen Spannungstensor!

   (b) Wie ist der Poynting-Vektor $\vec{S}$ definiert und welche physikalischen Bedeutungen besitzt er?

   (c) Was bedeutet es, wenn von der "Eichfreiheit" des Vektorpotentials $\vec{A}$ die Rede ist? Wie lautet die Coulomb-Eichung?

   (d) Wie lauten die beiden Postulate der Speziellen Relativitätstheorie?

   (e) Welcher Gleichung müssen die Elemente der Lorentzgruppe per Definition genügen und wie lautet diejenige Lösung dieser Gleichung, die die Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen beschreibt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ gegeneinander bewegen?

   (f) Es sei $\vec{E}(\vec{x},t) = E_0\vec{e}$ mit einem beliebigen Einheitsvektor $\vec{e}$ und $\vec{B}(\vec{x},t) = 0$. Zeige, dass dann in K' die Relation $|\vec{E}'| > |\vec{B}'|$ gilt! Das Lorentz-Skalar $-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ kann hilfreich sein.

   (g) Wie lautet die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes und wie die zugehörige Euler-Lagrangegleichung?

2. **Energieverlust**

   Für die abgestrahlte Leistung $I = -\frac{dE}{dt}$ eines geladenen Teilchens mit Ruhemasse m und Ladung q, das sich in einem konstanten Magnetfeld der Stärke B auf einer Kreisbahn bewegt, kann folgende Formel hergeleitet werden:

   $$I = \frac{2q^4B^2}{3m^2c^3}\beta^2\gamma^2\,, \tag{1}$$

   wobei $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ist. Es soll die Abhängigkeit der Energie des Teilchens von der Zeit bestimmt werden.

   (a) Drücke zunächst $\beta^2\gamma^2$ durch die Energie E des Teilchens aus!

   (b) Gleichung (1) kann nun auf die Form

   $$\dot{f} = \alpha(1-f^2) \tag{2}$$

   mit entsprechendem f und α gebracht werden. Integriere diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen mit der Anfangsbedingung $E(0) = E_0$!

   (c) Welcher Energiewert ergibt sich für $t \to \infty$? Interpretiere das Ergebnis!

3. **Rotierende Scheibe**

   Eine Metallscheibe mit Radius R befinde sich in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{B}$. Wie groß ist die Spannung zwischen dem Mittelpunkt und einem beliebigen Punkt auf dem Rand der Scheibe?

4. **Multipolmomente**

   (a) Berechne für ein geladenes Teilchen mit der Ladung q, das sich auf der Bahn

   $$\vec{r}(t') = (r\cos\omega t', r\sin\omega t', 0) \tag{3}$$

   bewegt, das elektrische und magnetische Dipolmoment und das elektrische Quadrupolmoment $Q_{ij} = \int d^3x(3x_ix_j - \delta_{ij}\vec{x}^2)\rho(\vec{x})$.

   (b) Für die abgestrahlte Leistung gilt:

   $$I = \frac{2}{3c^2}\ddot{\vec{p}}^2 + \frac{1}{180c^5}\operatorname{tr}(\dddot{Q}^2) + \frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{m}}^2. \tag{4}$$

   Vergleiche die unterschiedlichen Beiträge der zeitgemittelten Multipolmomente!

5. **Ein Sender**

   In der Vorlesung und der Übung wurde ausgehend von der Wellengleichung für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x}, t)$ und dem Formalismus der Greenschen Fuktionen das Vektorpotential

   $$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{5}$$

   hergeleitet.

   (a) Wie hängt hier t' mit t, $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ zusammen?

   (b) Es sei nun

   $$\vec{j}(\vec{x}', t') = I\delta(x')\cos(\omega t')\vec{e}_z. \tag{6}$$

   Berechne $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ mit Hilfe von (5)! Wende zunächst die Rotation bezüglich $\vec{x}$ auf Gleichung (5) an, ohne die Ableitung explizit auszuführen. Werte dann das Integral durch geeignete Substitution und Einführen von Polarkoordinaten r und φ aus! Schreibe hierzu die Ableitung nach x auf eine nach r um!

   (c) Bestimme nun $\vec{E}$ aus einer der Maxwell-Gleichungen!
   Hinweis: $\frac{d}{dx}\frac{x}{|x|} = \frac{d}{dx}\operatorname{sign}(x) = 2\delta(x)$.

   (d) Zeige, dass die anderen drei Maxwell-Gleichungen erfüllt sind!

   (e) Berechne den Poynting-Vektor und den zeitgemittelten Energiestrom!

6. **Le génie des alpages (4 Punkte)**

   Ein schneller ICE (Baulänge ab Werk $\ell' = \sqrt{2}a$) durchfahre mit Geschwindigkeit $v > 0$ einen bei x_0 beginnenden Tunnel der Länge a. Schafe beobachten, dass er zu einem bestimmten Zeitpunkt den Tunnel mit seiner Länge genau ausfüllt.

   (a) Wie schnell fährt der Zug?

   (b) Zum genannten Zeitpunkt ($t_1 = t_2 = T$) wird die Einfahrt des Tunnels mit einem Gitter verschlossen und die Ausfahrt, die vorher verschlossen war, geöffnet. Die Zugreisenden, die das wissen, sind sehr besorgt, denn sie stellen ein anderes Verhälnis von Zug- zu Tunnellänge fest. Welches Verhältnis berechnen sie?
   Hinweis: Wähle das mit dem Zug verbundene Koordinatensystem geeignet!

   (c) Ist die Besorgnis der Zugreisenden berechtigt? Hinweis: In 4-dim. Ereignissen denken!