Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2017

Übung 6

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 29.06.2014 Besprechung: 29.06.2014

7. Die Liealgebra $su(3)$

Begründe, daß die $su(3)$ von folgender Basis aufgespannt wird

$$\lambda_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_5 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_6 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_7 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_8 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i) Zeige: λ_2, λ_5, λ_7 erzeugen eine $su(2)$ Unteralgebra der $su(3)$. Ist diese definierende Darstellung der $su(3)$ irreduzibel bzgl. der $su(2)$ Unteralgebra? M.a.W.: Sind die drei Matrizen λ_2, λ_5, λ_7 reduzibel oder irreduzibel?

ii) Wie *i)* mit λ_1, λ_2, λ_3.

8. Die Liealgebra $so(4)$

In dieser Aufgabe wollen wir die Begriffe adjungierte Darstellung und Killing-Form üben. Wir wollen dies anhand der $so(4)$ tun.

i) Überlege, daß die $so(4)$ 6-dimensional ist und aus den spurlosen imaginären antisymmetrischen 4×4-Matrizen besteht. Eine geeignete Basis besteht aus den 4×4-Matrizen $a_{\alpha\beta}$ für $1 \le \alpha < \beta \le 4$ mit fast allen Einträgen gleich 0, außer an der Stelle $\alpha\beta$ mit dem Wert $-i$ und an der Stelle $\beta\alpha$ mit dem Wert $+i$. Wir haben beispielsweise

$$a_{13} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Insbesondere ist $a_{\alpha\beta}$ eine Matrix und nicht ein Matrixelement.

Wähle eine Anordnung der Basiselemente, z.B. $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$.

ii) Zeige, daß a_{12} in der adjungierten Darstellung operiert wie

$$a_{12} \cdot |a_{12}\rangle = 0, \quad a_{12} \cdot |a_{34}\rangle = 0,$$

$$a_{12} \cdot |a_{13}\rangle = +i|a_{23}\rangle, \quad a_{12} \cdot |a_{14}\rangle = +i|a_{24}\rangle, \quad a_{12} \cdot |a_{23}\rangle = -i|a_{13}\rangle, \quad a_{12} \cdot |a_{24}\rangle = -i|a_{14}\rangle$$

womit z.B. gemeint ist, daß $[a_{12}, a_{23}] = -ia_{13}$. Wie operieren a_{13} und a_{34} in der adjungierten Darstellung? Notiere die 6×6-Matrizen zu a_{12}, a_{13} und a_{34}.

iii) Wie lautet die Killing-Form für die obige Basis der $so(4)$?

Berechne dazu die Spur der paarweisen Produkte der drei oben aufgestellten 6×6-Matrizen. Die explizit betrachteten Fälle sollten ausreichen, um zu begründen, daß die Killing-Form in der gewählten Basis diagonal ist und die Diagonalelemente gleich 4 sind.