Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2017

Übung 2

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 11.05.2017 Besprechung: 11.05.2017

3. Die reguläre Darstellung/Gruppenalgebra der S_3

Diese Aufgabe sieht lang(wierig) aus, ist aber völlig durchge'tippt' und verlangt nicht so viele Rechnungen wie man glauben könnte.

Wir untersuchen in dieser Aufgabe die Gruppe S_3 mit den 6 Gruppenelementen

$$e, \qquad (12), (23), (31) \qquad (123), (321)$$

Wir betrachten ferner den 6-dimensionalen Vektorraum (Gruppenalgebra) A der 'formalen' $\mathbb{C}$-Linearkombinationen der Gruppenelemente.

1. Stelle die 6×6-Matrizen der (regulären) Darstellung zu den Gruppenelementen (12) und (123) in A auf.
2. S_3 hat drei Konjugationsklassen $K_1 = \{e\}$, K_2, K_3 (welche?).

   Betrachte für jede Konjugationsklasse K_i die Summe der Elemente und nenne das Ergebnis κ_i

   $$\kappa_i := \sum_{g \in K_i} g \in A$$

   Konkret bedeutet dies z.B. $\kappa_2 = (12) + (23) + (31)$

   Berechne $\kappa_i \cdot \kappa_j$ für alle 9 Kombinationen und stelle fest, daß sich das Ergebnis immer als Linearkombination der κ_k schreiben läßt

   $$\kappa_i \cdot \kappa_j = \sum_k C_{ijk}\, \kappa_k \qquad (*)$$

   wobei C_{ijk} komplexe Zahlen sind (und sich als natürliche Zahlen erweisen).

   Tipp: Da K_i eine Konjugationsklasse ist, gilt $\kappa_i \cdot g = g \cdot \kappa_i$ für jedes g und insbesondere gilt $\kappa_i \cdot \kappa_j = \kappa_j \cdot \kappa_i$. Man muß also nur κ_2^2, $\kappa_2\kappa_3$, κ_3^2 wirklich rechnen.
3. Die Objekte κ_1, κ_2, κ_3 kommutieren untereinander und mit jedem $g \in S_3$. Um unter der Wirkung der g's invariante Unterräume zu finden, müssen die κ_i simultan diagonalisiert werden.

   Tipp: Schreibe keine 6×6-Matrizen hin, sondern benutze $(*)$ mit den zuvor berechneten C_{ijk}. Dies liefert schon einmal die Eigenwerte $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (1, 0, -1)$, $(1, \pm 3, 2)$. Warum?
4. Bestimme die Unterräume von A, in denen die $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ diagonal sind und auf die die Wirkung der g's beschränkt werden kann.

   Tipp: Versuche nicht, etwas wie $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (1, -3, 2)$ als Gleichung zu lösen, sondern nutze alle 'spektralen Daten', um zu zeigen, daß der zugehörige Raum das Bild von $\kappa_2 \cdot (\kappa_2 - 3)$ ist.
5. Wir wissen (u.a. aus den allgemeinen Theoremen der Vorlesung), daß die reguläre Darstellung in zwei 1-dimensionale irreduzible und eine 2-dimensionale irreduzible, die doppelt vorkommt, zerfällt.

   Aus der letzten Teilaufgabe wissen wir, daß die 2-dimensionalen irreduziblen Darstellungen in dem Unterraum 'leben', der von

   $$(13) - (12),\ (23) - (12),\ (123) - e,\ (132) - e$$

   aufgespannt wird.

   Zerlege diesen Raum in zwei 2-dimensionale Unterräume, auf die die Wirkung der g's beschränkt werden kann.

Tipp:

– Suche die Basisvektoren, die (12) möglichst einfach aussehen lassen $\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dies ist möglich, da (12) die Eigenwerte ± 1 hat (warum?).

–Bestimme einen Eigenvektor v von (12) zum Eigenwert $+1$ (oder -1) und wende darauf (13) an und finde so den zweiten von insgesamt zwei linear unabhängigen Vektoren, die einen invarianten Raum aufspannen.

Schlußbemerkung: Die 'Operatoren' κ_i sind soetwas wie 'Casimir'-Operatoren, die den Gesamtspin (im Falle $SU(2)$) bzw. die Gewichte (im allgemeineren Fall einer $SU(n)$) der irreduziblen Darstellungs-Komponenten fixieren.