Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2017

Übung 1

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 04.05.2017 Besprechung: 04.05.2017

1. Symmetrische Gruppe

Wir untersuchen in dieser Aufgabe die Gruppe S_4 der bijektiven Abbildungen einer 4-elementigen Menge auf sich selbst, d.h. $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$. Zweck dieser Übung ist das Erinnern und Üben von Begriffen, die schon in der Linearen Algebra kennengelernt, aber zwischenzeitlich vielleicht wieder vergessen wurden.

1. Was ist die Ordnung (= Anzahl aller Gruppenelemente) von S_4?
2. Lege nun die Zykeldarstellung zu Grunde. Überlege, daß es genau fünf Muster geben kann
$$(), \qquad (**), \qquad (**)(**), \qquad (***), \qquad (****)$$
wobei die Sterne paarweis verschiedene Elemente aus $\{1,2,3,4\}$ sind. Wieviele verschiedene Gruppenelemente umfaßt jede Klasse? In welcher Klasse befinden sich gerade, in welcher ungerade Gruppenelemente?
3. Wieviele Konjugationsklassen gibt es und wie "sehen" sie aus? Tipp: hier ist nicht viel zu tun.
4. Zu den Untergruppen von S_4:
   - Welche Ordnungen sind grundsätzlich erlaubt?
   - Gib Beispiele von Untergruppen der Ordnung 2, 3, 4, 6, 8 und 12 (ist letzteres notwendig die alternierende Gruppe A_4 der geraden Gruppenelemente von S_4?).
   - Gib ein Beispiel eines nichttrivialen Normalteilers (=invariante Untergruppe). Tipp: Vereinige geeignete Konjugationsklassen, so daß eine Untergruppe entsteht.

2. Der Gruppenring der S_3

1. Zeige
$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{6}\big[() + (12) + (13) + (23) + (123) + (213)\big] \\
e_2 &= \frac{1}{6}\big[() - (12) - (13) - (23) + (123) + (213)\big] \\
e_3 &= \frac{1}{3}\big[() + (12)\big]\big[() - (13)\big] \\
e_4 &= \frac{1}{3}\big[() + (13)\big]\big[() - (12)\big]
\end{aligned}$$
sind idempotente Elemente, d.h. $e_i^2 = e_i$, die sich gegenseitig annullieren, d.h. $e_i \cdot e_j = 0$ für $i \neq j$.
Tipp: Hier und weiter unten kann folgende Relation hilfreich sein: $e_1+e_2+e_3+e_4 = id$. (Zeige zuerst $e_i \cdot e_j = 0$ für $i \neq j$, danach $e_i^2 = e_i$.)
2. Bezeichne $R\,(= R_{S_3})$ den Gruppenring. Überlege: $R \cdot e_i$ ist Linksideal. Welche Dimensionen haben Re_1,... Re_4? Beweise dann
$$R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus Re_4$$

3. Der Gruppenring ist ein Vektorraum, auf dem die Gruppe S_3 wirkt bzw. dargestellt wird. Die Re_i sind invariante Untervektorräume, auf die die Wirkung der Gruppe S_3 beschränkt werden kann (Untermodule). Zeige, daß $\phi_i := S_3 \to Aut(Re_i)$ Darstellungen sind, wobei

$$\phi_i(g)v := gv, \qquad (g \in S_3, v \in Re_i)$$

und gv das Ergebnis der Multiplikation des Gruppenelementes g mit dem Ringelement v ist.

Sind die Darstellungen ϕ_i irreduzibel?