Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2014

Übung 8

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 04.07.2014 Besprechung: 04.07.2014

9. Casimir-Operatoren

Wir interessieren uns hier für Operatoren, die mit allen Erzeugern einer gegebenen Lie-Algebra vertauschen. Ganz allgemein gibt es r (=Rang) unabhängige solcher *Casimir*-Operatoren. Explizite Ausdrücke sind im allgemeinen schwierig zu beschaffen, jedoch gibt es immer einen "einfachen" quadratischen Casimir-Operator:

$$C_1 = \sum_{n=1}^{r} X_n^2$$

wobei $X_1, ..., X_r$ orthonormal bzgl. der Killingform sind.
Zeige:

i) C_1 vertauscht mit allen X_i.

(Tipp: Unter den genannten Voraussetzungen haben die Strukturkoeffizienten eine wichtige Symmetrie-Eigenschaft.)

ii) Wie lautet C_1 für $su(2)$ und $su(3)$?

iii) Welche (Zahlen-) Werte nimmt C_1 für die $su(3)$ in den bisher behandelten Darstellungen (3- und 8-dimensional) an?

(Tipp: Hier muß kaum gerechnet werden.)

10. Auf- und Absteiger

Zeige: $[E_\alpha, E_\beta]$ ist proportional zu $E_{\alpha+\beta}$. Was folgt, falls $\alpha + \beta$ keine Wurzel ist?

11. Die Liealgebren $so(4)$ und $so(5)$

Wir hatten in Aufgabe 8 die Wurzeln (= Gewichtsvektoren der adjungierten Darstellung, 6-dimensional) der $so(4)$ bestimmt. Hier sollen dieselben Objekte durch Betrachtung der definierenden Darstellung der $so(4)$ (4-dimensional) reproduziert werden. Der Vorteil ist, daß in niedrigerer Dimension schneller gerechnet werden kann. Die Wurzeln ergeben sich dann als Differenzen von einigen Gewichtsvektoren.

i) Diagonalisiere $H_1 = a_{12}$ und $H_2 = a_{34}$ simultan in der definierenden Darstellung. Die Gewichtsvektoren sollten $(\pm 1, 0)$ und $0, \pm 1)$ sein. Zeichne die Gewichtsvektoren in ein 2-dimensionales Diagramm.

ii) Die Auf- und Absteiger $E_{\pm\alpha}$ bilden Eigenzustände von H_1 und H_2 mit Gewichtsvektor μ auf andere Eigenzustände mit Gewichtsvektor $\mu \pm \alpha$ ab, wobei auch 0 als Ergebnis auftreten kann.

Es gibt 4 Gewichtsvektoren, so daß es 12 Differenzvektoren gibt, wovon allerdings nur 8 voneinander verschieden sind. Unter diesen sind aber nur 4 "richtige Wurzeln".

Aus "allgemeinen Symmetriegründen" würde man erwarten, daß entweder Differenzen von je zwei Gewichtsvektoren auf verschiedenen Achsen oder aber Differenzen von je zwei Gewichtsvektoren auf der gleichen Achse die Wurzeln liefern. Im letzteren Fall wären die Wurzeln gleich $(\pm 2, 0)$ und $(0, \pm 2)$. Kann dies sein? Wäre die definierende Darstellung der $so(4)$ dann noch irreduzibel (was sie offensichtlich ist)?

Das Ganze kann dann in analoger Weise auf die $so(5)$ angewendet werden. Wir benutzen wieder die Notation der a_{ij}, wovon es nun 10 verschiedene gibt. Wir wollen die Untersuchung von 10×10-Matrizen vermeiden. Die definierende Darstellung ist nur 5-dimensional und der Rang dieser Lie-Algebra gleich 2 wie im $so(4)$ Fall! (Bemerkung: der Rang geht erst bei der $so(6)$ auf 3.) Wir betrachten wieder eine Cartansche-Unteralgebra, die durch $H_1 = a_{12}$ und $H_2 = a_{34}$ aufgespannt wird (hier sind dies 5×5-Matrizen).

i) Die Gewichtsvektoren sollten $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ und $(0, 0)$ sein. Zeichne die Gewichtsvektoren in ein 2-dimensionales Diagramm.

ii) Wir suchen $10 - 2 = 8$ Wurzeln (2-dimensionale). Wir zweifeln nicht daran, daß darunter die bekannten $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ vorkommen. Es fehlen noch 4 Wurzeln. Welche sind dies?

12. Eine 6-dimensionale Darstellung der $su(3)$

Wir kennen die Wurzeln der $su(3)$. Dies sind $\pm\alpha^1$ und $\pm\alpha^2$ (Vorsicht: der obere Index ist kein Exponent), wobei

$$\alpha^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \alpha^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

und $\pm(\alpha^1 + \alpha^2)$.
Wir wollen eine Darstellung der $su(3)$ konstruieren mit folgenden Forderungen:

$|\mu_0\rangle$ sein ein Zustand mit Gewichtsvektor $\mu_0 = 2\mu^1$, wobei

$$\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \left(\text{es gibt auch, aber hier nicht gebraucht: } \mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right)$$

und wird von den Aufsteigern zu 0 gemacht:

$$E_{\alpha^1}|\mu_0\rangle = E_{\alpha^2}|\mu_0\rangle = 0.$$

Zeige mit der in der Vorlesung hergeleiteten Formel

$$2\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha \cdot \alpha} = q - p$$

und den zugehörigen Bedeutungen von p und q:

i) Auch $E_{-\alpha^2}$ auf $|\mu_0\rangle$ angewendet liefert 0, aber $E_{-\alpha^1}$ kann insgesamt 2 mal angewendet werden, ohne 0 zu erhalten.

ii) Auf den Zustand (hier nicht auf Normierung geachtet) $|\mu_0 - \alpha^1\rangle := E_{-\alpha^1}|\mu_0\rangle$ kann $E_{-\alpha^2}$ 1 mal angewendet werden, ohne 0 zu erhalten. Dazu ist die obige Formel "... $= q - p$" zu nutzen mit den notwendigen Ersetzungen und daß $E_{\alpha^2}|\mu_0 - \alpha^1\rangle = 0$, da E_{α^2} und $E_{-\alpha^1}$ kommutieren (warum?).

iii) Auf den Zustand $(E_{-\alpha^1})^2|\mu_0\rangle$ kann $E_{-\alpha^2}$ 2 mal angewendet werden, ohne 0 zu erhalten.

iv) Insgesamt haben wir zu $|\mu_0\rangle$ 5 Zustände konstruiert, insgesamt liegen 6 vor. Bitte Gewichtsvektoren in ein Diagramm einzeichnen.

Man kann (muß aber nicht) sich überlegen, daß jedes weitere Anwenden von H's und E's nicht aus diesem 6-dimensionalen Raum herausführt.