Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2014

Übung 7

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 24.06.2014 Besprechung: 24.06.2014

8. Die Liealgebra $so(4)$

In dieser Aufgabe wollen wir die Begriffe adjungierte Darstellung, Killing-Form, Cartansche-Unteralgebra und die simultane Diagonalisierung der Elemente der Cartanschen-Unteralgebra in der adjungierten Darstellung üben. Wir wollen dies anhand der $so(4)$ tun.

i) Überlege, daß die $so(4)$ 6-dimensional ist und aus den spurlosen imaginären antisymmetrischen 4×4-Matrizen besteht. Eine geeignete Basis besteht aus den 4×4-Matrizen $a_{\alpha\beta}$ für $1 \leq \alpha < \beta \leq 4$ mit fast allen Einträgen gleich 0, außer an der Stelle $\alpha\beta$ mit dem Wert $-i$ und an der Stelle $\beta\alpha$ mit dem Wert $+i$. Wir haben beispielsweise

$$a_{13} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Insbesondere ist $a_{\alpha\beta}$ eine Matrix und nicht ein Matrixelement.

Wähle eine Anordnung der Basiselemente, z.B. $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$.

ii) Zeige, daß a_{12} in der adjungierten Darstellung operiert wie

$$a_{12} \cdot |a_{12}\rangle = 0, \quad a_{12} \cdot |a_{34}\rangle = 0,$$

$$a_{12} \cdot |a_{13}\rangle = +i|a_{23}\rangle, \quad a_{12} \cdot |a_{14}\rangle = +i|a_{24}\rangle, \quad a_{12} \cdot |a_{23}\rangle = -i|a_{13}\rangle, \quad a_{12} \cdot |a_{24}\rangle = -i|a_{14}\rangle$$

womit z.B. gemeint ist, daß $[a_{12}, a_{23}] = -ia_{13}$. Wie operieren a_{13} und a_{34} in der adjungierten Darstellung? Notiere die 6×6-Matrizen zu a_{12}, a_{13} und a_{34}.

iii) Wie lautet die Killing-Form für die obige Basis der $so(4)$?

Berechne dazu die Spur der paarweisen Produkte der drei oben aufgestellten 6×6-Matrizen. Die explizit betrachteten Fälle sollten ausreichen, um zu begründen, daß die Killing-Form in der gewählten Basis diagonal ist und die Diagonalelemente gleich 4 sind.

iv) Wähle als Basis der/einer Cartanschen Unteralgebra die Elemente a_{12} und a_{34}. Oben sind schon die zugehörigen Matrizen in der adjungierten Darstellung bestimmt worden.

Diagonalisiere simultan die beiden a_{12} und a_{34}. Hier ist nur ein 4×4-Block relevant, da wir ja zwei Eigenvektoren zum Eigenwert 0 schon haben. (Wenn von Hand gerechnet wird, mag die Berechnung der Eigenzustände von $a_{12} \cdot a_{34}$ leichter fallen; a_{12} und a_{34} können anschließend durch geeignete Linearkombinationen diagonalisiert werden.)

Wie lauten die Eigenzustände und die Eigenwerte, d.h. die Gewichte bzw. Gewichtsvektoren?

Wir sehen unter anderem, daß $(0, 1, i, i, -1, 0)$ bzw. $E_{(+1,+1)} = a_{13} + ia_{14} + ia_{23} - a_{24}$ Eigenvektor ist mit zugehörigem Gewichtsvektor $(+1, +1)$. Dieser und die anderen $E_{(\pm1,\pm1)}$ können in der allgemeinen Darstellungstheorie der $so(4)$ als Auf- und Absteiger benutzt werden wie es grundsätzlich aus der Darstellungstheorie der $su(2)$ bekannt ist. Hier taucht als "magnetische Quantenzahl" etwas zweidimensionales auf, was aber auch nur diskrete Werte annimmt. (Mehr dazu in der Vorlesung.)