Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2014

Übung 6

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 17.06.2014 Besprechung: 17.06.2014

6. Nachlese "Young-Operatoren"

Wir betrachten nochmals die S_4 und in den bisherigen Übungen und Vorlesungen offen gebliebene Probleme.

i) Zeige

$$[e-(12)][e-(34)]\cdot(23)(14)\cdot[e+(13)][e+(24)] = [e-(12)][e-(34)]\cdot[e+(13)][e+(24)]$$

Tipp: $(23)(14) = (12)(34)(13)(24)$

ii) Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} = 0$$

wobei hier jedes Young-Tableau für den zugehörigen Young-Operator steht.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn man zeigen kann, daß für jedes Element a der Gruppenalgebra

$$[e-(13)][e-(24)]\cdot a\cdot\sum_{p\in S_3} p = 0$$

gilt. Dies wiederum ist gezeigt, wenn man die Aussage für geeignete Basiselemente a der Gruppenalgebra zeigen kann. Wie folgt dies aus

$$g^{-1}\cdot[e-(13)][e-(24)]\cdot g\cdot\sum_{p\in S_3} p = 0$$

und schließlich: warum gilt die letzte Gleichung für g beliebig aus S_4?

7. Die Liealgebra $su(3)$

Begründe, daß die $su(3)$ von folgender Basis aufgespannt wird

$$\lambda_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_5 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_6 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_7 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_8 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i) Zeige: λ_2, λ_5, λ_7 erzeugen eine $su(2)$ Unteralgebra der $su(3)$. Ist diese definierende Darstellung der $su(3)$ irreduzibel bzgl. der $su(2)$ Unteralgebra? M.a.W.: Sind die drei Matrizen λ_2, λ_5, λ_7 reduzibel oder irreduzibel?

ii) Wie *i)* mit λ_1, λ_2, λ_3.