



BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Vorlesungsskript zur
Fortgeschrittenen Quantenmechanik

Prof. A. Klümper

Autor: Lea Debus, A. Klümper

Datum: 8. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Relativistische Quantenmechanik	2
1.1	Spezielle Relativitätstheorie / Notation	2
1.2	Klein-Gordon-Gleichung	3
1.3	Dirac-Theorie	5
1.4	Pauli-Gleichung	10
1.5	Relativistisches Coulomb-Problem	13
1.6	Relativistische Kovarianz der Klein-Gordon- und der Dirac-Gleichung .	16
1.7	Darstellungstheorie der Lorentzgruppe	21
2	Quantenfeldtheorien	31
2.1	Zweite Quantisierung	32
2.2	Wicksches Theorem und Rechenregeln, Beweis nach Gaudin	39
2.3	Quantisierung des Dirac-Feldes	42
2.4	Kontinuuumstheorie/-mechanik I	49
2.5	Quantisierung des reellwertigen Klein-Gordon-Feldes	53
2.6	Quantisierung des komplexen Klein-Gordon-Feldes	57
2.7	Kontinuuumstheorie/-mechanik II: Erhaltungsgrößen	59
2.8	Green'sche Funktionen und Propagatoren	64
3	Pfadintegrale	67
3.1	Einführung	68
3.2	Kohärente Zustände	71
3.2.1	Bosonische Systeme	71
3.2.2	Fermionische Systeme	75
3.3	Ein-Teilchen-Greens-Funktionen und Wick'sches Theorem	77
3.3.1	Wicksches Theorem	79
4	Lie-Gruppen und -Algebren	80
4.1	Wurzeln und Gewichte	85
4.1.1	Darstellungen und Gewichte	91
4.1.2	Auf- und Absteiger	92
4.2	Einfache Wurzeln	97
4.2.1	Dynkin Diagramme	99
4.2.2	Fundamentale Gewichte	100
4.2.3	Beliebige irreduzible Darstellungen $D = (q^1, \dots, q^r)$	101
4.2.4	TensorDarstellungen	104

1 Relativistische Quantenmechanik

1.1 Spezielle Relativitätstheorie / Notation

Betrachte einen kontravarianten 4er-Vektor

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\mu) \quad (1.1)$$

$$\text{mit } x^0 = ct \text{ und } \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \quad (1.2)$$

mit der Metrik $(g_{\mu\nu})$

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

und dem Skalarprodukt (Summenkonvention für wiederholte, entgegengesetzt gestellte Indizes)

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (1.4)$$

Ein kontravarianter Vektor x liefert im Skalarprodukt mit g den dualen kovarianten Vektor.

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.5)$$

Einschub: Der kontravariante 4er-Raum ist dual zum kovarianten 4er-Raum: Der zu einem Raum V duale Raum V^* ist die Menge der linearen Abbildungen auf V . Liegt ein Skalarprodukt vor, gibt es einen kanonischen Isomorphismus von V und V^* .

Daraus folgt:

$$x_0 = x^0 = ct, \quad x_i = -x^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu, \quad (1.7)$$

$$g^{\mu\nu} := (g^{-1})_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

wobei g mit zwei kontravarianten Indizes so definiert ist, daß dieses Objekt aus dem kovarianten Vektor wieder den kontravarianten macht.

Die partiellen Ableitungen $\partial_\mu, \partial^\mu$ sind wie folgt definiert:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (1.9)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (1.10)$$

Das Skalarprodukt liefert den d'Alembert-Operator

$$\square := -\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \quad (1.11)$$

Mit dem 4er-Impuls

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

folgt die Energie-Impuls-Beziehung

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (1.12)$$

Zuletzt notieren wir die Kontinuitätsgleichung für erhaltene Größen

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{mit} \quad (j^\mu) = (c\rho, \vec{j}) \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (1.14)$$

Tensoren, die in kontra- bzw. kovarianter Weise aus anderen kontra- bzw. kovarianten Tensoren aufgebaut werden, haben unter der Lorentzgruppe ein wohldefiniertes Transformationsverhalten, insbes. ist der d'Alembert-Operator ein Skalar.

1.2 Klein-Gordon-Gleichung¹

Analog zur nicht-relativistischen Quantenmechanik benutzen wir die Substitution

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}. \quad (1.15)$$

¹s. Schwabel, S.116 ff

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung folgt mit obiger Ersetzung sowie Anwenden auf eine Wellenfunktion die Klein-Gordon-Gleichung:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = -\hbar^2 c^2 \Delta \Psi + m^2 c^4 \Psi \quad (1.16)$$

$$\Leftrightarrow (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \Psi = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung.} \quad (1.17)$$

Probleme der Klein-Gordon-Gleichung

Wahrscheinlichkeitsdichte In der Quantenmechanik gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \Psi^* \Psi = |\Psi|^2$, die positiv ist und für die eine Kontinuitätsgleichung gilt

$$\rho = \Psi^* \Psi \quad (1.18)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2m} (\psi^* \vec{P} \psi - \psi \vec{P} \psi^*) \quad (1.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{i}{\hbar} \vec{P} \cdot \vec{j} = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} [(\vec{P} \psi^*)(\vec{P} \psi) + \psi^* \vec{P}^2 \psi - (\vec{P} \psi)(\vec{P} \psi^*) - \psi \vec{P}^2 \psi^*] \quad (1.20)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left[\psi^* i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \right)^* \right] = - \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \quad (1.21)$$

$$= -\dot{\rho} \quad (1.22)$$

Aber hier:

$$\begin{aligned} \Psi^* (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \Psi &= 0 \\ \Psi (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \Psi^* &= 0 \\ \Rightarrow \Psi^* \partial_\mu \partial^\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \partial^\mu \Psi^* &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_\mu [\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*] &= 0. \end{aligned}$$

Wir definieren als 4er-Stromdichte

$$j^\mu := \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*) \quad (1.23)$$

für die die Kontinuitätsgleichung gilt sowie

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

$$j^0 = c\rho = \frac{i\hbar}{2mc} (\Psi^* \dot{\Psi} - \Psi \dot{\Psi}^*) \quad \leftarrow \text{Problem: nicht notwendig positiv}$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*).$$

Beschreibt in der QFT Ladungsdichte und simultan Teilchen sowie Antiteilchen.

Zu gegebenem \vec{p} gibt es positive und negative Energien

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4} = \hbar \omega_{\pm}. \quad (1.24)$$

Es gibt daher zwei freie Lösungen/ebene Wellen

$$\Psi(\vec{r}, t) = C \cdot e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \quad (1.25)$$

mit

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}. \quad (1.26)$$

Die allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung lautet:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left\{ A(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_+ t)} + B(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_- t)} \right\} \quad (1.27)$$

- negative Energien \Rightarrow Probleme in Thermodynamik und Statistik, nicht stabil
- indefinite Dichte, negative Beiträge durch Beiträge mit negativer Energie
- beschreibt nur Teilchen ohne Spin bzw. mit Spin 0
- Auflösung der Problematik in der Quantenfeldtheorie: negative Energien liefern über Lochanregungen Antiteilchen mit positiver Energie; konsistent für Fermionen, Bosonen haben Propagatoren/Greensche Funktionen zum KG-Operator.

Historische Bemerkungen: Die KG-Gleichung wurde schon vor Klein und Gordon untersucht und zwar durch Schrödinger selbst und auch Fock. Schrödinger hatte sogar die KG-Gleichung mit Coulombpotential, also ein Wasserstoffatom mit "Elektron ohne Spin" gelöst, aber eine andere Feinstruktur gefunden als experimentell beobachtet. Daraufhin verwarf er diese Theorie und veröffentlichte sie auch nicht.

1.3 Dirac-Theorie

Zur Vermeidung der Probleme bei der Klein-Gordon-Gleichung nutzte Dirac eine Differentialgleichung 1. Ordnung in der Zeit und wegen der beabsichtigten relativistischen

Invarianz auch mit Ableitungen 1. Ordnung bzgl. des Ortes mit folgenden Ansatz:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \underbrace{\left(\frac{\hbar}{i} c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta m c^2 \right)}_{=:H} \Psi \quad (1.28)$$

$$H = (c\vec{\alpha}\vec{P} + \beta m c^2) \quad (\text{Dirac-Gleichung}) \quad (1.29)$$

wobei α_i , $i = 1, 2, 3$ und β (hermitische) Matrizen sind und Ψ ein mehrkomponentiger Vektor mit komplexen Feldern ist. Wir fordern, dass die Komponenten von Ψ die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, so dass die ebenen Wellen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$H^2 \Psi = E^2 \Psi = (c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4) \Psi, \quad (1.30)$$

erfüllen. Ein Vergleich mit (1.28), also

$$(c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m c^2)^2 = (c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4) \quad (1.31)$$

liefert Bedingungen für α_i und β :

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \quad (1.32)$$

$$\alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0 \quad (1.33)$$

$$\beta^2 = 1 \quad (1.34)$$

Die Wahl einer skalaren Größe $\beta = \pm 1$ führt zu $\alpha_k = 0$ und steht im Widerspruch zu (1.32). Daher entscheidet man sich hier für die Dirac-Lösung (den sog. 'kleinsten' Matrizen):

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \\ & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ \sigma_k & \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

wobei σ_k Pauli-Matrizen sind, welche die Antikommutatorrelation

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} \quad (1.36)$$

erfüllen. Wir nennen (1.29) die Dirac-Gleichung, mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Kontinuitätsgleichung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho = \Psi^+ \Psi = \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_4^* \Psi_4 \quad (1.38)$$

und die Stromdichte

$$\vec{j} = c\Psi^+ \vec{\alpha} \Psi \quad (\text{ohne Ableitungen}) \quad (1.39)$$

ergeben sich aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi^+ \Psi = \frac{1}{i\hbar} [\Psi^+ H \Psi - (H \Psi)^+ \Psi] \quad (1.40)$$

$$= - \left[\Psi^+ (c\vec{\alpha} \vec{\nabla}) \Psi + \underbrace{(c\vec{\alpha} \vec{\nabla} \Psi)^+}_{= \vec{\nabla} \Psi^+ c\vec{\alpha}} \Psi \right] \quad (1.41)$$

$$= -\nabla(\Psi^+ c\vec{\alpha} \Psi) \quad (1.42)$$

und es folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.43)$$

mit der Viererstromdichte $(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ aus (1.38) ist nun positiv definit! Sie kann also im Rahmen der 1-Teilchen-Theorie als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden.

γ -Matrizen

Durch den Gebrauch der sogenannten Gamma- oder auch Dirac-Matrizen kann die Dirac-Gleichung alternativ formuliert werden. Sie sind wie folgt definiert:

$$\gamma^0 := \beta, \quad \gamma^k := \beta\alpha_k \quad (1.44)$$

Aus (1.29) folgt mit dieser Definition

$$[i\hbar(\gamma^0\partial_0 + \gamma^k\partial_k) - mc]\Psi = 0 \quad (1.45)$$

$$\Leftrightarrow (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0 \quad (1.46)$$

$$\text{bzw. } (\gamma^\mu P_\mu - mc)\Psi = 0 \quad (1.47)$$

wobei $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$, $P_\mu = i\hbar\partial_\mu$. Die γ -Matrizen haben folgende Eigenschaften:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4 \quad (\text{Clifford-Algebra}) \quad (1.48)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad (1.49)$$

$$\text{mit } \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \\ & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} & \sigma_k \\ -\sigma_k & \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Es ist üblich statt der ‘‘einfach’’ adjungierten Wellenfunktion folgende Konstruktion zu benutzen

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*). \quad (1.51)$$

Die Stromdichte lässt sich somit schreiben als

$$j^\mu = c\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = c\bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.52)$$

Lösungen der Dirac-Gleichung

Ohne äußere Felder dienen ebene Wellen

$$\Psi(\vec{r}, t) = ue^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (1.53)$$

$$= ue^{-ikx} \quad (1.54)$$

als Ansatz mit $(k^\mu) := (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$. Einsetzen in die Dirac-Gleichung (1.47) liefert:

$$(\gamma^\mu P_\mu - mc)ue^{-ikx} = 0 \quad (1.55)$$

wobei $P_\mu = i\hbar\partial_\mu$. Und damit gilt

$$P_\mu e^{-ikx} = \hbar k_\mu e^{-ikx} = e^{-ikx} \cdot \begin{cases} \hbar k_0, & \mu = 0 \\ -\hbar \vec{k}, & \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (1.56)$$

Um dieses 4-komponentige lineare Gleichungssystem zu lösen, wählen wir

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

und es folgt für die Dirac-Gleichung (1.47) mit (1.56), wobei $p_\mu = \hbar k_\mu$

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = \begin{pmatrix} (p_0 - mc)\varphi - (\vec{p}\vec{\sigma})\chi \\ (-p_0 - mc)\chi + (\vec{p}\vec{\sigma})\varphi \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (1.58)$$

Zunächst einmal wollen wir die zu einem p gehörige Energie bestimmen. Aus der letzten Gleichung folgen die Beziehungen

$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 - mc}\chi, \quad \chi = \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 + mc}\varphi. \quad (1.59)$$

Damit diese Bedingungen mit nichttrivialen φ und χ konsistent sind, muß gelten

$$\frac{(\vec{p}\vec{\sigma})^2}{p_0^2 - m^2c^2} = \mathbb{1}_2, \quad (1.60)$$

Es gilt aber $(\vec{p}\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$, so daß wir die bekannte relativistische Energieformel erhalten. Wir werden negative Energien nicht los.

Wir wählen φ (χ) per Ansatz für Energien $E > 0$ ($E < 0$) und darauf folgt dann χ (φ):

$$\begin{aligned} \bullet \ E > 0: \text{ Wähle } \varphi_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \chi_1 &= \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 + mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_3c}{E+mc^2} \\ \frac{(p_1+ip_2)c}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \chi_2 &= \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 + mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(p_1-ip_2)c}{E+mc^2} \\ \frac{-p_3c}{E+mc^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \bullet \ E > 0: \text{ Wähle } \varphi_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \chi_1 &= \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 + mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_3c}{E+mc^2} \\ \frac{(p_1+ip_2)c}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \chi_2 &= \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 + mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(p_1-ip_2)c}{E+mc^2} \\ \frac{-p_3c}{E+mc^2} \end{pmatrix} \right\} \text{ 'kleine Komponenten'} \quad (1.61)$$

- $E < 0$: Wähle $\chi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \varphi_3 &= \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 - mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{p_3 c}{|E| + mc^2} \\ \frac{(p_1 + ip_2)c}{|E| + mc^2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \varphi_4 &= \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{p_0 - mc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{(p_1 - ip_2)c}{|E| + mc^2} \\ \frac{-p_3 c}{|E| + mc^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \text{ 'kleine Komponenten' } \quad (1.62)$$

Deutung der Lösungen

- positive Energien: klar
- negative Energien: Im Grundzustand sind negative Energiemoden vollständig besetzt, Lochanregungen sind Teilchen positiver Energie; Bild ist konsistent für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (allgemeiner: halbzahlige Spins); dies sind in relativistischer QFT Teilchen fermionischer Natur. In Quantenfeldtheorie sind Teilchen und Antiteilchen gleichberechtigt behandelt. Die Dirac-Theorie mit kleinsten γ^μ Matrizen vom Format 4×4 stellt eine Vorhersage der Existenz von Antiteilchen dar.

1.4 Pauli-Gleichung

Nun betrachten wir die Kopplung an das elektromagnetische Feld. Dazu ersetzen wir den Impuls (auch 'minimale Kopplung' genannt)

$$P^\mu \rightarrow P^\mu - eA^\mu \quad (1.63)$$

mit $(A^\mu) = (\frac{\Phi}{c}, \vec{A})$. Es tritt ein skalares elektrisches Potential $e\Phi$ als Ruheenergie in H dazu

$$H = c\vec{\alpha}(\vec{P} - e\vec{A}) + e\Phi + \beta mc^2 \quad (1.64)$$

Dadurch wird die Dirac-Gleichung invariant gegenüber Eichtransformationen und es folgt

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (1.65)$$

Mit $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ folgt

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - mc^2 \right) \varphi = c(\vec{P} - e\vec{A})\vec{\sigma}\chi, \quad (1.66)$$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + mc^2 \right) \chi = c(\vec{P} - e\vec{A})\vec{\sigma}\varphi. \quad (1.67)$$

Für stationäre Zustände $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = E\Psi$ und für positive Energien, die klein und nicht-relativistisch sind

$$E = mc^2 + \underbrace{E'}_{\text{klein}} \simeq mc^2 \quad (1.68)$$

und kleine Potentiale Φ ergibt sich u.a.

$$\underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}_{E \simeq mc^2} - e\Phi + mc^2 \simeq 2mc^2. \quad (1.69)$$

Sodann aus (1.67)

$$(E' - e\Phi)\varphi = c(\vec{P} - e\vec{A})\vec{\sigma}\chi, \quad (1.70)$$

$$2mc^2\chi = c(\vec{P} - e\vec{A})\vec{\sigma}\varphi. \quad (1.71)$$

Dies in einander eingesetzt liefert

$$(E' - e\Phi)\varphi = \frac{1}{2m} [(\underbrace{\vec{P} - e\vec{A}}_{=: \vec{a}})\vec{\sigma}]^2 \varphi. \quad (1.72)$$

Für das weitere Vorgehen wird zunächst das Quadrat des Produktes $\vec{a}\vec{\sigma}$ ausgerechnet (es tauchen hoch und tiefgestellte Indizes auf und wir wenden die Summenkonvention

an, dies hat jedoch nichts mit kovarianten und kontravarianten Objekten zu tun)

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{a}\vec{\sigma}) &= \sum_{j,k} a^j \sigma_j a^k \sigma_k = \sum_{j,k} a^j a^k \underbrace{\sigma_j \sigma_k}_{=\delta_{jk} + i\epsilon_{jkl}\sigma_l} = \sum_{j,k} a^j a^k \delta_{jk} + \sum_{j,k,l} a^j a^k i\epsilon_{jkl}\sigma_l \quad (1.73) \\
&= \vec{a}^2 + i \sum_{j,k} (P^j - eA^j)(P^k - eA^k)\epsilon_{jkl}\sigma_l \\
&= \vec{a}^2 + i \underbrace{(P^j P^k \epsilon_{jkl}\sigma_l)}_{=0} + e^2 \underbrace{A^j A^k \epsilon_{jkl}\sigma_l}_{=0} - eP^j A^k \epsilon_{jkl}\sigma_l - eA^j P^k \epsilon_{jkl}\sigma_l \\
&= \vec{a}^2 - ie(P^j A^k - A^k P^j)\epsilon_{jkl}\sigma_l = \vec{a}^2 - e\hbar(\nabla^j A^k - A^k \nabla^j)\epsilon_{jkl}\sigma_l \\
&= \vec{a}^2 - e\hbar(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{\sigma} = \vec{a}^2 - e\hbar\vec{B} \cdot \vec{\sigma}
\end{aligned}$$

Setzen wir das Ergebnis aus (1.74) in (1.72) ein, erhalten wir die Pauli-Gleichung

$$(E' - e\Phi)\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{B} \cdot \vec{\sigma} \right] \varphi, \quad (1.74)$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{B} \cdot \vec{\sigma} + e\Phi \right] \varphi, \quad (1.75)$$

wobei wir in der letzten Zeile mit φ eigentlich $\exp(\frac{i}{\hbar}mc^2t)\varphi$ meinen.

Für nicht zu starke Felder $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$ können wir wie folgt rechnen (und quadratische Terme ignorieren sowie benutzen, daß P_j und A_j kommutieren)

$$(\vec{P} - e\vec{A})^2 = \vec{P}^2 - e(\vec{r} \times \vec{P})\vec{B} = \vec{P}^2 - e\vec{L}\vec{B} \quad (1.76)$$

und damit folgt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{e}{2m}\vec{L}\vec{B} - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} \right] \varphi \quad (1.77)$$

$$= \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} - \frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S})\vec{B} \right] \varphi, \quad (1.78)$$

mit $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Der Faktor 2 vor dem Spin \vec{S} ist der gyromagnetische Faktor.

Weitere relativistische Korrekturen können mit Hilfe der Foldy-Wouthuysen-Transformation $\Psi = e^{-iS}\Psi'$ berücksichtigt werden. Aus der Dirac-Gleichung folgt dann

$$i\partial_t e^{-iS}\Psi' = H e^{-iS}\Psi' \quad (1.79)$$

$$\Rightarrow i\partial_t \Psi' = H' \Psi', \quad H' = e^{iS}(H - i\partial_t)e^{-iS}, \quad (1.80)$$

wobei H' obere und untere Komponenten bei geeigneter Wahl von S weitestgehend

getrennt hält.

1.5 Relativistisches Coulomb-Problem

Wir betrachten das Coulomb-Potential ($V := e\Phi$, $\vec{A} = 0$)

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r}, \quad (1.81)$$

sodass sich der Hamilton-Operator

$$H = c\vec{\alpha}\vec{P} + \beta mc^2 + V(r) \quad (1.82)$$

ergibt. Wir setzen (1.82) in die Eigenwertgleichung $H\Psi = E\Psi$ ein und formen um

$$(c\vec{\alpha}\vec{P} + \beta mc^2)\Psi = (E - V(r))\Psi \quad | \cdot (c\vec{\alpha}\vec{P} + \beta mc^2) \quad (1.83)$$

$$\Leftrightarrow (c^2\vec{P}^2 + m^2c^4)\Psi = (c\vec{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2)(E - V(r))\Psi \quad | \Psi = \Psi(r) \quad (1.84)$$

$$\Leftrightarrow (c^2\vec{P}^2 + m^2c^4)\Psi = [(E - V(r))(c\vec{\alpha}\vec{P} + \beta mc^2) - \frac{\hbar}{i}c\vec{\alpha}(\vec{\nabla}V)]\Psi \quad (1.83) \quad (1.85)$$

$$\Leftrightarrow (c^2\vec{P}^2 + m^2c^4)\Psi = \left[(E - V(r))^2 - \frac{\hbar}{i}c\vec{\alpha}(\vec{\nabla}V) \right] \Psi, \quad (1.86)$$

wobei wir benutzt haben $\vec{\nabla}V(r)\Psi(r) = V(r)\vec{\nabla}\Psi(r) + \underbrace{\Psi(r)\vec{\nabla}V(r)}_{(\vec{\nabla}V(r))\Psi(r)}$. Weiterführende

Strategie: Rückführung der Gleichung auf bekannte Eigenwertgleichung in Radialform der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Wir ersetzen in (1.86) das Impulsquadrat durch radialen Impuls und Drehimpuls

$$\vec{P}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \vec{L}^2. \quad (1.87)$$

und erhalten

$$\left(-\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \underbrace{\frac{1}{r^2} \vec{L}^2 - \frac{E^2}{c^2}}_{\Lambda(\Lambda + \hbar)} - \frac{2E\gamma}{c^2 r} - \underbrace{\frac{\gamma^2}{c^2 r^2} - \frac{i\hbar\gamma}{cr^3} \vec{\alpha}\vec{r}}_{\frac{E^2}{c^2}} + m^2c^2 \right) \Psi = 0 \quad (1.88)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Lambda(\Lambda + \hbar) - \frac{2E\gamma}{c^2 r} - \frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 \right) \Psi = 0, \quad (1.89)$$

mit (Temple's) Operator Λ und Spin-Operator \vec{S}

$$\Lambda := -\frac{1}{\hbar}(2\vec{L}\vec{S} + \hbar^2) - \frac{i\gamma}{cr}\vec{\alpha}\vec{r}, \quad \vec{S} := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

$$\Lambda^2 = \vec{L}^2 + 2\vec{L}\vec{S} + \hbar^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}, \quad (1.91)$$

$$\Lambda(\Lambda + \hbar) = \vec{L}^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{i\hbar\gamma}{cr}\vec{\alpha}\vec{r}. \quad (1.92)$$

wobei die zweite Zeile aus der ersten folgt, aber eine gewisse Rechnung erfordert (Übungsaufgabe. Beachte: Λ ist die Summe von zwei Termen, die antikommutieren!) Die dritte Zeile folgt dann einfach aus der ersten und zweiten und rechtfertigt die Zusammenfassung der Terme wie in (1.89) benutzt.

Um die Eigenwerte von Λ^2 zu finden, formen wir (1.91) um

$$\Lambda^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 - \vec{S}^2 + \hbar^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} = \underbrace{\vec{J}^2}_{\text{EW: } j(j+1)\hbar^2} + \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\gamma^2}{c^2} \quad (1.93)$$

$$= j(j+1)\hbar^2 + \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\gamma^2}{c^2} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}. \quad (1.94)$$

Achtung: in QM I taucht auch ein Ausdruck $\Lambda(\Lambda + \hbar)$ auf, wobei aber dort Λ nur in dieser Kombination erscheint und per def. nicht-negativ ist. Dies ist hier anders! Wir erhalten die Eigenwerte von Λ

$$\lambda = \pm\hbar\lambda_0, \quad (1.95)$$

$$\lambda_0 = +\sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{\hbar c} \quad (\text{Feinstrukturkonstante, } \gamma = e^2). \quad (1.96)$$

Damit folgt für die Eigenwerte $\hbar^2\tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ von $\Lambda(\Lambda + \hbar)$

$$\tilde{l} = \begin{cases} \lambda_0, & \lambda = +\hbar\lambda_0 \\ \lambda_0 - 1, & \lambda = -\hbar\lambda_0, \end{cases} \quad (1.97)$$

Angewendet auf (1.89) folgt die Radialgleichung

$$\left(-\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \hbar^2\frac{\tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{r^2} - \frac{2E\gamma}{c^2r} - \frac{E^2}{c^2} + m^2c^2\right)\Psi = 0 \quad (1.98)$$

Bemerkungen:

- gleiche Struktur wie in QM1

- $\tilde{l}(\tilde{l} + 1) > 0$ außer für kleine j (z.B.: $j = \frac{1}{2}$)
- $r^{\tilde{l}+1}$ Asymptotik bei $r \simeq 0$ immer noch physikalisch (auch bei $j = \frac{1}{2}$)

Wir führen nun Abkürzungen ein

$$\tilde{m} = \frac{E}{c^2}, \quad (1.99)$$

$$2\tilde{m}\tilde{E} = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2, \quad (1.100)$$

Dies liefert die Gleichung für den nicht-relativistischen Fall (dort war $\tilde{l} = l$ ganzzahlig, was aber nicht wesentlich war)

$$\left(-\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \hbar^2 \frac{\tilde{l}(\tilde{l} + 1)}{r^2} - \frac{2\tilde{m}\gamma}{r} - 2\tilde{m}\tilde{E} \right) \Psi = 0 \quad (1.101)$$

wobei hier \tilde{m} die nicht-relativistische Masse und \tilde{E} die nicht-relativistische Energie sind. Mit der nicht-relativistischen Lösung

$$\tilde{E} = -\frac{\tilde{m}\gamma^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(N + \tilde{l} + 1)^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{2\tilde{E}}{\tilde{m}} = -\frac{\alpha^2 c^2}{(N + \tilde{l} + 1)^2}, \quad (1.102)$$

wobei $N = 0, 1, 2, \dots$ die (immer noch ganzzahlige) radiale Quantenzahl ist, aber \tilde{l} nicht mehr ganzzahlig (auch nicht halbzahlig) ist, siehe (1.97). Es folgt die relativistische Lösung, wobei wir zunächst $2\tilde{E}/\tilde{m}$ mittels (1.100) durch E und m ausdrücken

$$\frac{2\tilde{E}}{\tilde{m}} = \left(1 - \frac{m^2 c^4}{E^2} \right) c^2 \quad (1.103)$$

$$(1.102) \Rightarrow 1 - \frac{m^2 c^4}{E^2} = -\frac{\alpha^2}{(N + \tilde{l} + 1)^2}, \quad (1.104)$$

$$\Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(N + \tilde{l} + 1)^2}}} \quad (1.105)$$

Bemerkung: Dies liefert die Feinstrukturaufspaltung der Hauptenergieniveaus nach dem Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Es bleibt eine Restentartung bezüglich des Bahndrehimpulses (jedes $j (\neq \frac{1}{2})$ ist zweimal realisiert).

Das Ergebnis wird vertrauter mit folgenden Setzungen. Die Hauptquantenzahl n (ganzzahlig) ist definiert als

$$n := N + 1 + j \pm \frac{1}{2}, \quad \text{für} \quad \lambda = \pm \hbar \lambda_0. \quad (1.106)$$

Für beide Vorzeichen ergibt sich

$$N + \tilde{l} + 1 = n - j \mp \frac{1}{2} + \tilde{l} = n - j - \frac{1}{2} + \lambda_0, \quad (1.107)$$

und damit

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}\right)^2}}}. \quad (1.108)$$

1.6 Relativistische Kovarianz der Klein-Gordon- und der Dirac-Gleichung

Notation: Lorentzgruppe Sei a beliebiges Element der Lorentzgruppe

$$a : x \mapsto a \cdot x = ax =: x' \quad (1.109)$$

$$(x^\mu) \mapsto (a^\mu{}_\nu x^\nu) = (x'^\mu) \quad (1.110)$$

Damit gilt für Ableitungsoperatoren

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = a^\nu{}_\mu \partial'_\nu = \partial'_\nu a^\nu{}_\mu \quad (1.111)$$

$$\partial^\mu = \partial'^\nu a_\nu{}^\mu. \quad (1.112)$$

Per Definition der Lorentzgruppe gilt für alle Vierer-Vektoren x, y :

$$(ax) \cdot (ay) = x \cdot y \quad \text{bzgl. Metrik} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}. \quad (1.113)$$

In Komponentenschreibweise $x \cdot y = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} x^{\bar{\mu}} y^{\bar{\nu}}$, daraus wird nun

$$a^\mu{}_{\bar{\mu}} g_{\mu\nu} a^\nu{}_{\bar{\nu}} \stackrel{!}{=} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad | \cdot g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (1.114)$$

$$\Leftrightarrow a^{\mu\bar{\mu}} g_{\mu\nu} a^{\nu\bar{\nu}} = g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (1.115)$$

oder auch

$$a^\mu{}_{\bar{\mu}} g_{\mu\nu} a^\nu{}_{\bar{\nu}} \stackrel{!}{=} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad | \cdot g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (1.116)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a_\nu{}^{\bar{\mu}}}_{\stackrel{!}{=} (a^{-1})^{\bar{\mu}}{}_\nu} a^\nu{}_{\bar{\nu}} = g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \delta^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} \quad (1.117)$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^\mu{}_\nu = a_\nu{}^\mu \quad (1.118)$$

Für den d'Alembert Operator folgt nun

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial'_\nu a^\nu{}_\mu \partial'^\mu a_\kappa{}^\mu = \partial'_\nu \partial'^\nu \quad (1.119)$$

In Worten: Die inverse Abbildung ergibt sich durch Rauf- und Runterziehen der Indizes mit anschließendem "Vertauschen der Koordinaten links und rechts". Diese Manipulationen erscheinen eigenartig. Sie kennen das Ergebnis aber aus einer anderen Überlegung (Lineare Algebra, orthogonale Abbildungen):

$$(ax)^T g(ay) = x^T g y \quad \Rightarrow \quad a^T g a = g \quad \Rightarrow \quad g^{-1} a^T g = a^{-1}. \quad (1.120)$$

Notation: $\left. \begin{array}{l} \text{linker} \\ \text{rechter} \end{array} \right\} \text{Index} \equiv \begin{array}{l} \text{Zeilen} \\ \text{Spalten} \end{array}$, $\text{Index} \left\{ \begin{array}{l} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right. \equiv \begin{array}{l} \text{kontravariant} \\ \text{kovariant} \end{array}$

Ein bisschen lineare Algebra:

- V sei der Vektorraum der kontravarianten Vektoren. Dann ist V^* der duale Vektorraum der kovarianten Vektoren.
- Sei A eine Abbildung von V in V . Das Bild von x unter A ist Ax

$$(Ax)_i = \sum_j A_{ij} x_j$$

wobei notationsmäßig alle Indizes unten stehen, da wir in diesem Zusammenhang üblicherweise den dualen Raum nicht mitbetrachten.

Wir können aber alternativ die Abbildung A als Tensor im Raum $\underbrace{V}_{\text{obere}} \otimes \underbrace{V^*}_{\text{untere Indizes}}$ auffassen, also im Raum der multilinearen Abbildungen, die abbildet

$$(\text{dualer Vektor}, \text{Vektor}) \mapsto \text{Zahl}.$$

Setzt man nur einen Vektor ein, so ergibt sich eine lineare Abbildung, die duale Vektoren auf Zahlen abbildet. Dies muß ein Vektor sein

$$A \cdot x = \sum_j A^i{}_j x^j$$

Wir nehmen die **Klein-Gordon-Gleichung** (1.16)

$$(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \Psi = 0, \quad (1.121)$$

mit Wellenfunktion Ψ im Inertialsystem I und gehen mit einer Lorentztransformation a zum Inertialsystem I' . Ein Vierervektor x wird auf $x' = ax$ abgebildet. Eine (skalare)

Wellenfunktion ψ wird auf ψ' abgebildet, wobei

$$\psi'(x') = \psi(x), \quad \text{gelte, oder} \quad \Psi'(x) = \Psi(a^{-1}x). \quad (1.122)$$

Hieraus und der Lorentz-Invarianz des d'Alembert Operators folgt

$$\partial'_\mu \partial'^\mu \psi'(x') = \partial_\mu \partial^\mu \psi'(x') = \partial_\mu \partial^\mu \psi(x) = (\partial_\mu \partial^\mu \psi)(x). \quad (1.123)$$

Die wesentliche Aussage von (1.123) ist die Gleichheit ohne den mittleren Teil. Man überzeuge sich davon, daß wir durch Umbenennung von x' zu x und x zu $a^{-1}x$ erhalten

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi'(x) = (\partial_\mu \partial^\mu \psi)(a^{-1}x). \quad (1.124)$$

Es folgt offensichtlich die Lorentz-Invarianz der Klein-Gordon-Gleichung. Erfüllt ψ die KG, dann auch die transformierte Funktion ψ' .

Die Lorentz-Invarianz der KG ist so leicht zu zeigen, da man die Invarianz des d'Alembert Operators unabhängig von einer möglichen Transformation der Funktionswerte der Wellenfunktion hat. Dies ist im Falle der Dirac-Gleichung nicht so. Um das Vorgehen im Falle der Dirac-Gleichung vorzubereiten, führen wir die Invarianz der KG ein weiteres Mal durch und erhalten erneut (1.124).

Für die Vierer-Ableitung von Ψ gilt

$$\partial_\mu \Psi' = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi(a^{-1}x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) (a^{-1}x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \underbrace{(a^{-1}x)^\nu}_{(a^{-1})^\nu{}_\mu x^\mu} \quad (1.125)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) \cdot (a^{-1})^\nu{}_\mu = (a^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \Psi \quad (= \partial'_\mu \Psi) \quad (1.126)$$

und analog

$$\partial^\mu \Psi' = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \Psi \right) (a^{-1})^\nu{}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \Psi \right) a^\mu{}_\nu = a^\mu{}_\nu \partial^\nu \Psi \quad (= \partial'^\mu \Psi). \quad (1.127)$$

Damit folgt für den Ableitungsterm in der Klein-Gordon-Gleichung (1.16)

$$\partial_\mu \partial^\mu \Psi' = (\partial_\nu \partial^\nu \Psi)(a^{-1}x) \cdot \underbrace{a^\mu{}_\nu (a^{-1})^\nu{}_\mu}_{\sum_\mu \dots = (a^{-1}a)^\nu{}_\nu = \delta^\nu{}_\nu} = (\partial_\nu \partial^\nu \Psi)(a^{-1}x) \quad (1.128)$$

und wir erhalten die Klein-Gordon-Gleichung im Inertialsystem I' und beweisen damit

die Invarianz gegenüber Lorentztransformationen

$$(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \Psi' = 0 \quad (1.129)$$

$$\Leftrightarrow ([\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2] \Psi)(a^{-1} x) = 0 \quad (1.130)$$

$$\Leftrightarrow (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \Psi = 0. \quad (1.131)$$

Für die **Dirac-Gleichung** (1.47)

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \Psi = 0, \quad (1.132)$$

benötigen wir neben der Transformation bezüglich $a \in$ Lorentzgruppe auch die Wirkung im ‘Spinorraum’. Dazu nutzen wir folgenden Ansatz

$$\Psi'(x) = S(a) \Psi(a^{-1} x) \quad (1.133)$$

mit geeigneter Darstellung S der Lorentzgruppe im Spinorraum.

Bemerkung: Es handelt sich hier um eine Darstellung der Lorentz-Gruppe im Raum der Spinorfunktionen, denn transformiere Ψ zuerst mit a dann mit b ergibt sich die Transformation um ba :

$$\Rightarrow \Psi''(x) = S(b) \underbrace{\Psi'(b^{-1} x)}_{=S(a)\Psi(a^{-1}b^{-1}x)} = \underbrace{S(b)S(a)}_{=S(ba)} \Psi((ba)^{-1} x) \quad (1.134)$$

$$= S(ba) \Psi((ba)^{-1} x) \quad (1.135)$$

wobei wir genutzt haben, dass S eine Darstellung ist, d.h. es gilt $S(b)S(a) = S(ba)$. Für die Ableitung gilt

$$\partial_\mu \Psi' = S(a) (a^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \Psi \quad (1.136)$$

und es folgt für die Dirac-Gleichung

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \Psi' = i\hbar \gamma^\mu S(a) (a^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \Psi - mc S(a) \Psi \quad (1.137)$$

$$= S(a) \left[\underbrace{S(a^{-1}) i\hbar \gamma^\mu S(a) (a^{-1})^\nu{}_\mu}_{zz. = \gamma^\nu} \partial_\nu - mc \right] \Psi, \quad (1.138)$$

wobei die Argumente von Ψ' und Ψ nach der Anwendung der Ableitungsoperatoren x und $a^{-1}x$ sind.

Es bleibt also einzurichten, dass

$$S(a^{-1})\gamma^\mu S(a) \underbrace{(a^{-1})^\nu{}_\mu a^{\bar{\nu}}{}_\nu}_{\underbrace{(aa^{-1})^{\bar{\nu}}{}_\mu}_{=\delta^{\bar{\nu}}{}_\mu}} = \gamma^\nu a^{\bar{\nu}}{}_\nu \quad (1.139)$$

$$\Leftrightarrow S(a^{-1})\gamma^\mu S(a) = \gamma^\nu a^\mu{}_\nu. \quad (1.140)$$

Wir betrachten dazu a (aus der eigentlichen Lorentzgruppe) in der Nähe von id

$$a = id + \Delta\omega \text{ bzw. } a^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu \quad (1.141)$$

$$\Leftrightarrow a^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \underbrace{\Delta\omega^{\mu\nu}}_{\text{ist antisymmetrisch nach (1.115)}}, \quad (1.142)$$

$$\text{Ansatz: } S(a) = id + \Delta S \quad (1.143)$$

und wenden dies auf (1.140) an

$$(id - \Delta S)\gamma^\mu(id + \Delta S) = \gamma^\nu(\delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu) \quad (1.144)$$

$$\Leftrightarrow [\gamma^\mu, \Delta S] = \Delta\omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu \text{ (in 1. Ordnung)} \quad (1.145)$$

wobei Terme 0. Ordnung wegfallen und wir Terme 2. Ordnung ignoriert haben ($-\Delta S\gamma^\mu\Delta S$).

Behauptung:

$$\begin{aligned} \Delta S &= -\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ \Rightarrow \Delta S &= \frac{1}{8}\Delta\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{1}{8}\Delta\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \end{aligned} \quad (1.146)$$

Beweis:

$$[\gamma^\mu, \Delta S] = \frac{1}{8}[\gamma^\mu, [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]] \Delta\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{8}[\gamma^\mu, 2\gamma^\alpha\gamma^\beta] \Delta\omega_{\alpha\beta} \quad (1.147)$$

wegen der Antisymmetrie von $\omega_{\alpha\beta}$ in α, β . Weiter

$$[\gamma^\mu, \gamma^\alpha\gamma^\beta] = \{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma^\beta - \gamma^\alpha\{\gamma^\mu, \gamma^\beta\} = 2g^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \gamma^\alpha 2g^{\mu\beta} \quad (1.148)$$

Einsetzen und erneutes Nutzen der Antisymmetrie von $\Delta\omega$

$$[\gamma^\mu, \Delta S] = \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}\gamma^\beta - g^{\mu\beta}\gamma^\alpha) \Delta\omega_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha}\gamma^\beta \Delta\omega_{\alpha\beta} = \Delta\omega^\mu{}_\beta \gamma^\beta, \quad (1.149)$$

was (1.145) beweist.

Wir wollen uns schnell noch davon überzeugen, daß $\Delta\omega \mapsto \Delta S$ eine Darstellung ist, also $[\Delta\omega_1, \Delta\omega_2] \mapsto [\Delta S_1, \Delta S_2]$ bzw.

$$[\gamma^\mu, [\Delta S_1, \Delta S_2]] = [\Delta\omega_1, \Delta\omega_2]^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (1.150)$$

folgt, sofern dies für die einzelnen $\Delta\omega_j$ und ΔS_j gilt.

Beweis: Mittels Jacobi-Identität folgt

$$[\gamma^\mu, [\Delta S_1, \Delta S_2]] = -[\Delta S_1, [\Delta S_2, \gamma^\mu]] - [\Delta S_2, [\gamma^\mu, \Delta S_1]] \quad (1.151)$$

$$= -[[\gamma^\mu, \Delta S_2], \Delta S_1] + [[\gamma^\mu, \Delta S_1], \Delta S_2]. \quad (1.152)$$

Nun gilt

$$[[\gamma^\mu, \Delta S_1], \Delta S_2] = [\Delta\omega_1^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \Delta S_2] = \Delta\omega_1^\mu{}_\nu \Delta\omega_2^\nu{}_\alpha \gamma^\alpha, \quad (1.153)$$

woraus die gewünschte Beziehung folgt. Somit sind sowohl die Klein-Gordon-Gleichung als auch die Dirac-Gleichung Lorentz in-/ko-variant.

1.7 Darstellungstheorie der Lorentzgruppe

Wir betrachten hier die infinitesimalen Erzeuger der Lorentzgruppe, d.h. wir notieren $\Delta\omega$ "in Einheiten eines infinitesimalen δ " z.B. für 'Boosts'

$$\Delta\omega = \delta \cdot b, \quad (1.154)$$

wobei für b_i , den infinitesimalen 'Boost' in Raumrichtung i , gilt

$$\Delta\omega^{0i} = -\delta = -\Delta\omega^{i0} \quad \text{Rest } 0 \quad (1.155)$$

$$\text{d.h. } \Delta\omega^0{}_i = +\delta = \Delta\omega^i{}_0 \quad \text{Rest } 0 \quad (1.156)$$

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & & \\ 1 & & & \\ \cdot & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.157)$$

wobei die 1 jeweils an der i -ten Stelle der 0-ten Zeile bzw. 0-ten Spalte steht und die Matrix für $(b_i)^\mu{}_\nu$ steht.

Für die infinitesimalen Drehungen d_i um die i -te Raumachse gilt

$$d_1 : \Delta\omega^{23} = +\delta = -\Delta\omega^{32} \quad \text{Rest } 0 \quad (1.158)$$

$$\Delta\omega^2_3 = -\delta = -\Delta\omega^3_2 \quad (1.159)$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.160)$$

$$d_2 : \Delta\omega^{31} = +\delta = -\Delta\omega^{13} \quad \text{Rest } 0 \quad (1.161)$$

$$\Delta\omega^3_1 = -\delta = -\Delta\omega^1_3 \quad (1.162)$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.163)$$

$$d_3 : \Delta\omega^{12} = +\delta = -\Delta\omega^{21} \quad \text{Rest } 0 \quad (1.164)$$

$$\Delta\omega^1_2 = -\delta = -\Delta\omega^2_1 \quad (1.165)$$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.166)$$

Die Linearkombinationen der 4×4 -Matrizen b_i und d_i bilden die Lie-Algebra (\mathfrak{l}) der definierenden Darstellung der Lorentzgruppe (\mathcal{L}).

Es gelten wichtige Kommutatorrelationen

$$[b_1, b_2] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -d_3 \quad (1.167)$$

$$[d_1, d_2] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = d_3, \quad (1.168)$$

$$[b_1, d_1] = 0 \quad (1.169)$$

$$[b_1, d_2] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b_3 \quad (1.170)$$

$$[b_1, d_3] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -b_2 \quad (1.171)$$

sowie Relationen, die sich durch zyklisches Vertauschen ergeben.

Zusammengefaßt

$$[d_3, b_3] = 0, \quad [d_3, b_1] = +b_2, \quad [b_3, b_1] = -d_2, \quad (1.172)$$

$$[d_3, b_2] = -b_1, \quad [b_3, b_2] = +d_1, \quad (1.173)$$

$$[d_3, d_1] = +d_2, \quad [b_3, d_1] = +b_2, \quad (1.174)$$

$$[d_3, d_2] = -d_1, \quad [b_3, d_2] = -b_1. \quad (1.175)$$

(sowie zykl. Vertauschen)

Wir nehmen diese Relationen als Definition der abstrakten Lie-Algebra der Lorentzgruppe. Dabei wird der Kommutator bzw. das antisymmetrische Produkt zur Lie-Klammer.

Def.: Lie-Produkt Das Lie-Produkt ist als bilineare, antisymmetrische Abbildung definiert

$$\mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l} \quad (1.176)$$

$$(a, b) \mapsto [a, b] \quad (1.177)$$

für die die Jacobi-Identität erfüllt ist $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$.

Darstellung in einem Vektorraum V Jedem Element aus \mathfrak{l} wird ein Endomorphismus von V (oder – bezüglich beliebiger Basis von V – eine Matrix) zugeordnet. Ist diese Zuordnung strukturerhaltend, nennt man diese Abbildung der Algebra in $\text{End}(V)$ eine Darstellung.

Wird eine Gruppe oder Algebra über Matrizen definiert, so ist diese Definition gleichzeitig eine Darstellung, die sog. definierende Darstellung.

Für jede Lie-Algebra induziert das Lie-Produkt eine Darstellung in der Lie-Algebra selbst ($\mathfrak{l} \rightarrow \text{End}(V)$ mit $V = \mathfrak{l}$) die sog. adjungierte Darstellung

$$ad : \underbrace{\mathfrak{l}}_{6 \text{ dim. VR}} \rightarrow \underbrace{\text{End}(\mathfrak{l})}_{\text{alle Abb. des VR in sich } \simeq 6 \times 6 \text{ Matrizen}} \quad (1.178)$$

$$a \mapsto \underbrace{[a, \dots]}_{:= ad(a)(\dots) \equiv a^{ad}(\dots)}, \quad (1.179)$$

wobei jedem $a \in \mathfrak{l}$ eine lineare Abbildung von \mathfrak{l} in \mathfrak{l} zugeordnet ist. Beachte: Die Abbildung ad ist strukturerthaltend und damit eine Darstellung der Liealgebra \mathfrak{l}

$$\underbrace{ad([a, b])}_{\text{abstrakte Lie-Klammer}} = \underbrace{[ad(a), ad(b)]}_{\text{Kommutator}}. \quad (1.180)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \underbrace{ad([a, b]) \cdot c}_{\text{def. über Lie-Produkt}} &= [[a, b], c] && \text{[Jakobi-Identität]} \\ &= -[[b, c], a] - [[c, a], b] && [[x, y] = -[y, x]] \\ &= [a, \underbrace{[b, c]}_{=ad(b)c}] - [b, \underbrace{[a, c]}_{=ad(a)c}] \\ &= ad(a)ad(b)c - ad(b)ad(a)c \\ &= [ad(a), ad(b)] \cdot c \end{aligned}$$

Die Cartan'sche Unteralgebra ist eine maximale Unteralgebra mit untereinander kommutierenden Elementen ($\hat{=}$ mit verschwindendem Klammerprodukt, was nicht auf Kommutatoren beschränkt ist). Wir wählen als erzeugende Elemente b_3 und d_3 . Die gesamte Algebra ist eine direkte Summe aus der Cartan-Unteralgebra und dem durch b_1, b_2, d_1, d_2 aufgespannten Unterraum. Auf den ersten bzw. zweiten Unterraum ist die Wirkung von d_3^{ad}, b_3^{ad} null bzw. ungleich null. Wir betrachten daher die Abbildungen d_3^{ad}, b_3^{ad} nur in dem 4-dimensionalen Unterraum und finden bzgl. der Basis b_1, b_2, d_1, d_2

folgende Matrizen

$$d_3^{ad} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, b_3^{ad} = \begin{pmatrix} & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \end{pmatrix} \quad (1.181)$$

welche natürlich miteinander kommutieren.

Zusammengefasst

- Eigentliche Lorentzgruppe (\mathcal{L}_+^+ mit Zusammenhangskomponente id)
- infinitesimale Erzeuger reichen aus \rightarrow bilden 6-dimensionalen Vektorraum (VR) mit Lie-Klammern \equiv Lie-Algebra (per Def.)
- Basis in \mathfrak{l} (Lie-Algebra) ausgezeichnet durch: ‘Boost’-Operatoren b_1, b_2, b_3 und Drehungen d_1, d_2, d_3 . Deren Kommutatoren (Lie-Klammern) ergeben die Strukturfaktoren, das heißt Koeffizienten C_{ab} mit

$$[f_a, f_b] = C_{ab}^c f_c \quad (1.182)$$

wobei f_a, f_b Elemente aus $b_1, b_2, b_3, d_1, d_2, d_3$ sind.

- d_3^{ad} und b_3^{ad} kommutieren \Rightarrow können also simultan diagonalisiert werden.

Um d_3^{ad} und b_3^{ad} zu diagonalisieren, suchen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren per Ansatz und wählen

$$\text{EV: } \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ i\mu\sigma \\ -\mu \end{pmatrix} \text{ mit EW: } -i\sigma, +\mu \quad (1.183)$$

wobei $\sigma, \mu \in +1, -1$. Dann erfüllen diese die Eigenwertgleichungen

$$d_3^{ad} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ i\mu\sigma \\ -\mu \end{pmatrix} = -i\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ i\mu\sigma \\ -\mu \end{pmatrix}, \quad (1.184)$$

$$b_3^{ad} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ i\mu\sigma \\ -\mu \end{pmatrix} = \sigma\tilde{\sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ i\mu\sigma \\ -\mu \end{pmatrix} \quad (1.185)$$

mit d_3^{ad} und b_3^{ad} aus (1.181). Mit Lie-Klammern geschrieben folgt

$$d_3^{ad}(b_1 + i\sigma b_2 + i\mu\sigma d_1 - \mu d_2) = [d_3, b_1 + i\sigma b_2 + i\mu\sigma d_1 - \mu d_2] \quad (1.186)$$

$$= -i\sigma(b_1 + i\sigma b_2 + i\mu\sigma d_1 - \mu d_2) \quad (1.187)$$

und analog

$$b_3^{ad}(b_1 + i\sigma b_2 + i\mu\sigma d_1 - \mu d_2) = [b_3, b_1 + i\sigma b_2 + i\mu\sigma d_1 - \mu d_2] \quad (1.188)$$

$$= \mu(b_1 + i\sigma b_2 + i\mu\sigma d_1 - \mu d_2). \quad (1.189)$$

Wir betrachten die Operatoren id_3, b_3 mit den Eigenwerten σ, μ und definieren folgende Leiteroperatoren.

Def.: Leiteroperatoren $e_{\sigma\mu}$

$$e_{++} = b_1 + ib_2 + id_1 - d_2 \quad \text{Eigenwerte}(id_3, b_3) = +1, +1 \quad (1.190)$$

$$e_{+-} = b_1 + ib_2 - id_1 + d_2 \quad +1, -1 \quad (1.191)$$

$$e_{-+} = b_1 - ib_2 - id_1 - d_2 \quad -1, +1 \quad (1.192)$$

$$e_{--} = b_1 - ib_2 + id_1 + d_2 \quad -1, -1 \quad (1.193)$$

wobei die Indizes $+, -$ kurz für $+1, -1$ stehen. Dies ist äquivalent zu den Kommutatoren

$$[id_3, e_{\sigma\mu}] = \sigma e_{\sigma\mu}, \quad (1.194)$$

$$[b_3, e_{\sigma\mu}] = \mu e_{\sigma\mu}. \quad (1.195)$$

Eine weitere Untersuchung zeigt, daß e_{++} und e_{--} nicht miteinander kommutieren, aber mit e_{+-} und e_{-+} , welche wiederum nicht miteinander kommutieren. Dies läßt eine Entkopplung vermuten.

Tatsächlich entkoppelt die Lorentzgruppe beziehungsweise deren Lie-Algebra in ein direktes Produkt beziehungsweise in eine Summe von zwei $su(2)$, die wie folgt definiert

sind

Def.: $e_{k \in \{1,2,3\}}^\pm = \frac{1}{2}(id_k \pm b_k)$

Beh.: $[e_k^+, e_l^-] = 0$ und $[e_1^\pm, e_2^\pm] = ie_3^\pm$ (plus zykl. Vertauschen)

Die $su(2)$ Objekte mit oberem Index \pm haben – wie man sagt – Chiralität \pm .

Darstellungen der Lie-Algebra versteht man wie im Falle der $su(2)$ in der QM I wie folgt

- Besorge einen simultanen Eigenzustand zu $i d_3$ und b_3
- Erzeuge den ‘Rest’ (der irreduziblen Darstellung) mit den $e_{\sigma\mu}$

Wir kennen zwei Darstellungen der Lorentzgruppe, beide sind 4-dimensional, unterscheiden sich aber.

Definierende Darstellung Eigenvektoren zu id_3, b_3 sind (mit e_0, \dots, e_3 den Einheitsvektoren in der 4-dimensionalen Raum-Zeit)

$$v_\pm := e_1 \pm ie_2, \quad (1.196)$$

$$w_\pm := e_0 \pm e_3 \quad (1.197)$$

Die Eigenwertgleichung

$$id_3 v_\pm = i(e_2 \pm i(-e_1)) = \pm v_\pm, \quad id_3 w_\pm = 0 \quad (1.198)$$

$$b_3 v_\pm = 0, \quad b_3 w_\pm = e_3 \pm e_0 = \pm w_\pm \quad (1.199)$$

liefert die Eigenwerte $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$ mit dem Gewichtsdiagramm

Bemerkung: Die Darstellung ist irreduzibel: Ausgehend von irgendeinem Punkt liefert die Anwendung aller $e_{\sigma\mu}$ jeden anderen Punkt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} e_{++}w_- &= (b_1 + ib_2 + id_1 - d_2)(e_0 - e_3) \\ &= e_1 + ie_2 + ie_2 + e_1 \\ &= 2(e_1 + ie_2) \\ &= 2v_+ \end{aligned}$$

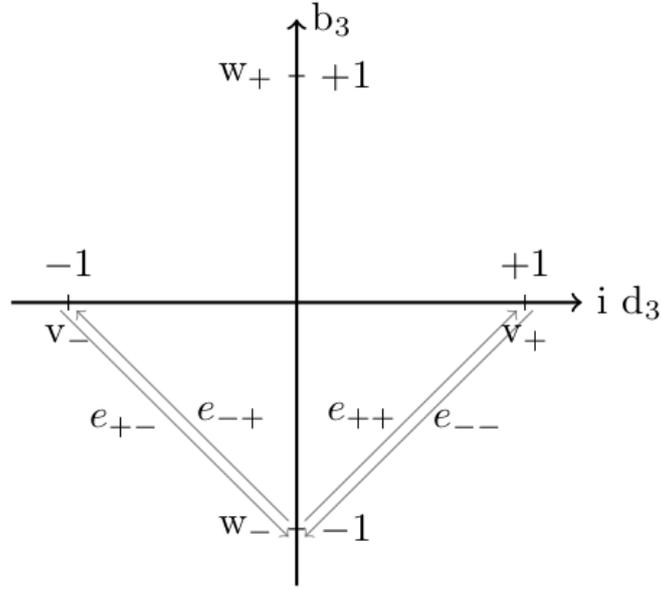


Abbildung 1.1: Abtragen der Eigenwerte zu (id_3, b_3) . Achtung: Mit id_3, b_3 sind deren Eigenwerte gemeint.

Die Normierung ist wie immer ein separates Problem.

Die definierende Darstellung ist in beiden $su(2)$ Komponenten je eine Spin-1/2 Darstellung.

4er Spinor-Darstellung zu $\Delta\omega$ zugeordnet: $\Delta S = \frac{1}{8}\Delta\omega^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Die Darstellung im 4er Spinor-Raum sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_i &= \{\Delta S \text{ mit } \Delta\omega^{0i} = -1 = -\Delta\omega^{i0}, \text{ Rest } 0\} \\ &= \frac{1}{8}([\gamma_i, \gamma_0] - [\gamma_0, \gamma_i]) = \frac{1}{8}(\underbrace{[\gamma^0, \gamma^i]}_{=2\alpha_i}) \cdot 2 = \frac{1}{2}\alpha_i, \\ \Rightarrow \tilde{b}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde $[\gamma^0, \gamma^i] = 2\gamma^0\gamma^i - \{\gamma^0, \gamma^i\} = 2\alpha_i + 0$. Weiter

$$\begin{aligned}\tilde{d}_3 &= \{\Delta S \text{ mit } \Delta\omega^{1,2} = +1 = -\Delta\omega^{2,1}, \text{ Rest } 0\} \\ &= \frac{1}{8}[\gamma^1, \gamma^2] \cdot 2 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.200}$$

Die zugehörigen Eigenzustände und Eigenwerte von $(i\tilde{d}_3, \tilde{b}_3)$ lauten:

$$\left(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right) : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gewichtsdiagramm ist in Fig. (1.2) gezeigt. Die 4-dimensionale Darstellung zerfällt

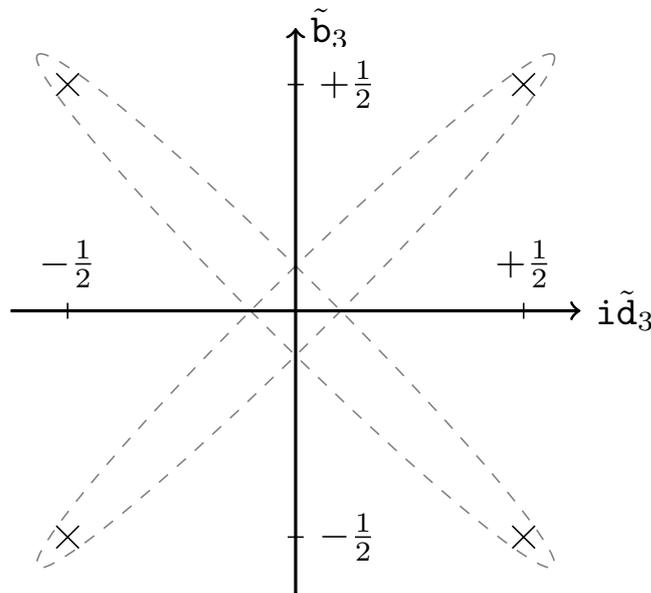


Abbildung 1.2: Reduzible Darstellung. Eingezeichnet sind die irreduziblen Multipletts der Dimension 2.

in zwei unabhängige 2-dimensionale Darstellungen: (i) auf dem 2-dimensionalen NO-SW-Raum wirken nur $e_{\pm,\pm}$ nicht-trivial, (ii) auf dem 2-dimensionalen NW-SO-Raum wirken nur $e_{\pm,\mp}$ nicht-trivial.

Diese Darstellung zerfällt also in zwei irreduzible Unterräume mit Spin-0 und Spin-1/2 Darstellung in den beiden $su(2)$ Komponenten.

Die gekennzeichneten zweidimensionalen Unterräume sind lorentzinvariant und Eigenräume von γ_5

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (1.201)$$

In unserer Spinordarstellung lässt sich γ_5 darstellen als

$$\gamma_5 = i \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \\ & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & \end{pmatrix} \quad (1.202)$$

$$= \begin{pmatrix} & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \end{pmatrix} \quad (1.203)$$

mit den Eigenwerten ± 1 . Die Matrix hat folgende koordinatenunabhängige Eigenschaften

- $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ (Beweis aus Clifford-Algebra)
- $(\gamma_5)^2 = +1$
- Eigenwerte (Lorentzinvariant) entsprechen der Chiralität

Die Helizität ist die Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung eines Teilchens und ist daher im Gegensatz zur Chiralität nicht Lorentzinvariant.

Die Chiralität ist zwar eine Lorentz-Invariante, was aber nicht heißen muß, daß physikalische Zustände eine wohldefinierte Chiralität haben. So “mischt” die Dirac-Gleichung beide Räume, wenn das Teilchen eine endliche Masse hat.

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi = 0. \quad (1.204)$$

Wir transformieren nun mit

$$U = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (1.205)$$

und erhalten

$$(i\hbar\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu - mc)\tilde{\Psi} = 0 \quad (1.206)$$

mit

$$\tilde{\gamma}_5 = U\gamma_5U^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (1.207)$$

$$\tilde{\gamma}^0 = U\gamma^0U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.208)$$

$$\tilde{\gamma}^k = U\gamma^kU^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (1.209)$$

Wir multiplizieren die letzte Form der Dirac-Gleichung mit $\tilde{\gamma}^0$

$$(i\hbar\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu - mc\tilde{\gamma}^0)\tilde{\Psi} = 0 \quad (1.210)$$

mit

$$\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} \quad (1.211)$$

Wir sehen, daß der Masseterm Beiträge unterschiedlicher Chiralität koppelt. Im Falle masseloser Teilchen liefert die Gleichung entkoppelte Gleichungen für 2er Spinoren mit definierter Chiralität. Dies sind die Weyl-Gleichungen.

Für positive Chiralität

$$\left(i\hbar \sum_k \sigma_k \partial_k + i\hbar \partial_0 \right) \phi = 0 \quad (1.212)$$

und negative Chiralität

$$\left(-i\hbar \sum_k \sigma_k \partial_k + i\hbar \partial_0 \right) \chi = 0 \quad (1.213)$$

Warum gibt es keine 2×2 γ^μ -Matrizen?

Gäbe es eine derartige Form der γ^μ -Matrizen, dann hätten wir nach (1.146) eine Darstellung der Lorentz-Gruppe im 2-dimensionalen Spinorraum. Damit wäre γ eine Lorentzinvariante im Tensorprodukt $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Dabei ist γ mit Indizes geschrieben $\gamma^\mu_{j,k}$ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ und $j, k = 1, 2$. In diesem Raum gibt es aber keine Lorentzinvariante. Denn sonst müßten die beiden 2-dimensionalen Darstellungen zu einer 4-dimensionalen Darstellung koppeln. Die beiden 2-dimensionalen Darstellungen sind aber Spin-1/2 Darstellungen in der gleichen $su(2)$ Komponente. Diese beiden Darstellungen koppeln zu einer Spin-0 und einer Spin-1 Darstellung dieser $su(2)$, aber nicht zu einem Produkt zweier Spin-1/2 Darstellungen in zwei verschiedenen $su(2)$ -Komponenten wie sie bei der definierenden Darstellung in \mathbb{R}^4 vorliegt.

2 Quantenfeldtheorien

Für die Beschreibung von Vielteilchensystemen werden wir häufig das großkanonische Ensemble wählen, das neben Energie- auch Teilchenaustausch erlaubt. Wir werden daher zunächst einen Formalismus herleiten, der den geeigneten Rahmen schafft: die sog. 2. Quantisierung. Danach werden wir Korrelationsfunktionen betrachten.

2.1 Zweite Quantisierung

Generelle Vorbemerkung: es wird nicht “noch einmal” quantisiert. Ausgangspunkt ist die Darstellung von N -Teilchenzuständen. Sei eine 1-Teilchenbasis gegeben: $|1\rangle, |2\rangle, \dots$ (weiter unten wichtig: Basis diskret und geordnet). Normierung: $\langle i | j \rangle = \delta_{ij}$.

Wir betrachten Vielteilchenzustände im Hilbertraum

$$\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1}_{N\text{-Mal}} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{H}_N^\pm = P_\pm(\mathcal{H}_1^{\otimes N}) \quad (2.1)$$

Es lassen sich alle N -Teilchenzustände darstellen durch Superposition von

$$P_\pm(|j_1\rangle |j_2\rangle \dots |j_N\rangle) \quad (2.2)$$

wobei P_\pm symmetrisiert bzw. antisymmetrisiert für Bosonen bzw. Fermionen (wir setzen die Symmetrieeigenschaften ununterscheidbarer Teilchen voraus; neben Bosonen und Fermionen gibt es – zumindest konzeptionell – noch in $d = 2$ (auch 1) sog. Anyonen mit gemischter Statistik).

Explizit haben wir die normierten Zustände

$$P_-(|j_1\rangle |j_2\rangle \dots |j_N\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P |j_{P(1)}\rangle |j_{P(2)}\rangle \dots |j_{P(N)}\rangle \quad (2.3)$$

und

$$P_+(|j_1\rangle |j_2\rangle \dots |j_N\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\dots}} \sum_P |j_{P(1)}\rangle |j_{P(2)}\rangle \dots |j_{P(N)}\rangle \quad (2.4)$$

wobei P alle Permutationen durchläuft und n_i die Anzahl des 1-Teilchenzustandes $|i\rangle$ im Produkt bezeichnet.

Bemerkung: Offenbar muss bei Fermionen $n_i = 0, 1$ und bei Bosonen $n_i \in \mathbb{N}_0$ gelten.

Die Norm für den bosonischen Fall lautet

$$\begin{aligned} \|P_+(\dots)\|^2 &= \frac{1}{N!n_1!n_2!\dots} \sum_{p',p} \underbrace{\langle j_{p'(1)} \rangle \dots \langle j_{p'(N)} | j_{p(1)} \rangle \dots | j_{p(N)} \rangle}_{= 0 \text{ in den meisten Fällen}} = 1. \quad (2.5) \\ &= 1, \text{ wenn } p' \text{ sich von } p \text{ nur in} \\ &\text{Permutationen, die verschiedene} \\ &\text{Faktoren mit gleichem } |i\rangle \text{ betreffen,} \\ &\text{unterscheidet.} \end{aligned}$$

Die Besetzungsdarstellung dieser Zustände lautet:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = P_{\pm} \left(\underbrace{|1\rangle \dots |1\rangle}_{n_1 \text{ mal}} \underbrace{|2\rangle \dots |2\rangle}_{n_2 \text{ mal}} \dots \right),$$

wobei die Zustände paarweise orthogonal zueinander sind und damit eine ONB bilden.

Teilchenerzeuger und -vernichter c_i^+, c_i (nach Jordan-Wigner)

Ein weiterer Schritt zur ökonomischen Darstellung ist die Einführung von Teilchen-Erzeugern und -Vernichtern: c_i^+, c_i . Dies geschieht hier zunächst für **Fermionen**, das Ergebnis für Bosonen zitieren wir unten. c_i und c_i^+ seien durch die Wirkung auf die Basiszustände wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} c_i |\dots n_i \dots\rangle &= (-1)^{\nu_i} |\dots (n_i - 1) \dots\rangle \quad (= 0, \text{ falls } n_i = 0), \quad \nu_i := \sum_{j=1}^{i-1} n_j \\ c_i^+ |\dots n_i \dots\rangle &= (-1)^{\nu_i} |\dots (n_i + 1) \dots\rangle \quad (= 0, \text{ falls } n_i = 1, \text{ für Fermionen}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Zur Notation: c_i^+ ist tatsächlich zu c_i adjungiert:

$$\langle \{m\} | c_i | \{n\} \rangle = \begin{cases} (-1)^{\nu_i}, & \text{falls } m_i = n_i - 1, m_j = n_j \text{ für } j \neq i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.7)$$

$$\langle \{n\} | c_i^+ | \{m\} \rangle = \begin{cases} (-1)^{\mu_i}, & \text{falls } n_i = m_i + 1, n_j = m_j \text{ für } j \neq i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.8)$$

wobei $\mu_i := \sum_{j < i} m_j$ analog zu ν_i definiert ist.

Bemerkung: c_i bildet total antisymmetrische N -Teilchenzustände auf total antisymmetrische $(N - 1)$ -Teilchenzustände ab; c_i^+ wirkt "umgekehrt": Vernichter bzw. Erzeuger. Diese Abbildungen operieren zwischen verschiedenen Räumen

$$c_i : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_{N-1}, \quad (2.9)$$

$$c_i^+ : \mathcal{H}_N \rightarrow \mathcal{H}_{N+1}. \quad (2.10)$$

Def. Fock-Raum: Als zugrundeliegenden Hilbertraum benutzt man den sog. Fockraum:

$$\mathcal{F} = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N \quad (2.11)$$

die direkte Summe aus allen N -Teilchenzuständen (+topologischer Abschluß). Dieser Raum wird immer explizit oder implizit den großkanonischen Behandlungen zugrunde

gelegt.

Eigenschaften von c_i, c_j^\dagger : Für die Teilchenoperatoren gelten wichtige Antikommutatorregeln:

$$\{c_i, c_j\} = c_i c_j + c_j c_i = 0 \quad (2.12)$$

dann auch

$$\{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = c_i^\dagger c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i^\dagger = 0 \quad (2.13)$$

Begründung: wir nehmen an $i < j$ (sonst vertauschen, $i = j$ klar):

$$\begin{aligned} c_i c_j |\{n\}\rangle &= c_i (-1)^{\nu_j} |\dots(n_j - 1)\dots\rangle \\ &= (-1)^{\nu_i + \nu_j} |\dots(n_i - 1)\dots(n_j - 1)\dots\rangle \\ c_j c_i |\{n\}\rangle &= c_j (-1)^{\nu_i} |\dots(n_i - 1)\dots\rangle \\ &= (-1)^{\nu_j - 1 + \nu_i} |\dots(n_i - 1)\dots(n_j - 1)\dots\rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

(Hier sind die Zahlen ν_i und ν_j bzgl. des Ausgangszustandes $|\{n\}\rangle$ genommen.) Ferner gilt

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (2.15)$$

Begründung: wir nehmen an $i < j$: analog zu oben

$$\begin{aligned} c_i c_j^\dagger |\{n\}\rangle &= (-1)^{\nu_i + \nu_j} |\dots(n_i - 1)\dots(n_j + 1)\dots\rangle \\ c_j^\dagger c_i |\{n\}\rangle &= (-1)^{\nu_j - 1 + \nu_i} |\dots(n_i - 1)\dots(n_j + 1)\dots\rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

Der Fall $i > j$ folgt ähnlich (oder das Adjungierte oben nehmen). Nun sei $i = j$

$$c_i c_i^\dagger |\{n\}\rangle = \begin{cases} |\{n\}\rangle, & \text{falls } n_i = 0, \\ 0, & \text{falls } n_i = 1, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$c_i^\dagger c_i |\{n\}\rangle = \begin{cases} 0, & \text{falls } n_i = 0, \\ |\{n\}\rangle, & \text{falls } n_i = 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

Def. Vakuum $|0\rangle$: Definieren wir nun das Vakuum als

$$|0\rangle := |00\dots0\dots\rangle \quad (2.19)$$

dann folgt

$$|\{n\}\rangle = (c_1^\dagger)^{n_1} (c_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle, \quad (2.20)$$

also für N -Teilchenzustände erhalten wir

$$c_{j_1}^+ c_{j_2}^+ \dots c_{j_N}^+ |0\rangle, \quad (2.21)$$

Für **Bosonen** halten wir kurz die Definitionen fest

$$\begin{aligned} c_i | \dots n_i \dots \rangle &= \sqrt{n_i} | \dots (n_i - 1) \dots \rangle \\ c_i^+ | \dots n_i \dots \rangle &= \sqrt{n_i + 1} | \dots (n_i + 1) \dots \rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

sowie die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [c_i, c_j] &= [c_i^+, c_j^+] = 0 \\ [c_i, c_j^+] &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bemerkung: Basiswechsel: gehen wir von einer Teilchenbasis $|i\rangle$ zu $|\widetilde{i}\rangle$ über, so gehen aus c_i die Operatoren \widetilde{c}_j hervor gemäß

$$\widetilde{c}_j = \sum_i \langle \widetilde{j} | i \rangle c_i, \quad \widetilde{c}_j^+ = \sum_i \langle i | \widetilde{j} \rangle c_i^+ \quad (2.24)$$

Denn genau dann gilt auch

$$\widetilde{c}_j^+ |0\rangle = \sum_i \langle i | \widetilde{j} \rangle \underbrace{c_i^+ |0\rangle}_{|i\rangle} = \left(\sum_i |i\rangle \langle i| \right) |\widetilde{j}\rangle = |\widetilde{j}\rangle \quad (2.25)$$

Wir haben bisher eine diskrete 1-Teilchenbasis $|i\rangle$ betrachtet. Wir wollen nun Feldoperatoren $\psi(\vec{x})$ über die 1-Teilchenzustände zum Ortsoperator und analog $c_{\vec{k}}$ zum Impulsoperator definieren:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \sum_i \langle \vec{x} | i \rangle c_i \\ c_{\vec{k}} &= \sum_i \langle \vec{k} | i \rangle c_i = \int d^3x \langle \vec{k} | \vec{x} \rangle \sum_i \langle \vec{x} | i \rangle c_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \psi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi(y)\} &= \{\psi^+(x), \psi^+(y)\} = 0, \\ \{\psi(x), \psi^+(y)\} &= \sum_{i,j} \langle \vec{x} | i \rangle \langle j | \vec{y} \rangle \{c_i, c_j^+\} \end{aligned}$$

$$= \sum_i \langle \vec{x} | i \rangle \langle i | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.27)$$

und analog für $c_{\vec{k}}$

$$\{c_{\vec{k}}, c_{\vec{q}}\} = 0, \quad \{c_{\vec{k}}^+, c_{\vec{q}}^+\} = 0 \quad (2.28)$$

$$\{c_{\vec{k}}, c_{\vec{q}}^+\} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}). \quad (2.29)$$

Für Bosonen

$$[\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})] = 0, \quad [\Psi^+(\vec{x}), \Psi^+(\vec{y})] = 0 \quad (2.30)$$

$$[\Psi(\vec{x}), \Psi^+(\vec{y})] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.31)$$

und analog für $c_{\vec{k}}, c_{\vec{q}}^+$.

Bemerkung: für Systeme mit endlichem Volumen V definiert man $\psi(x)$ und c_k wie oben, dabei variiert \vec{x} kontinuierlich über V und \vec{k} ist quantisiert mit zugehörigem Volumen $d^3k = \frac{(2\pi)^3}{V}$. (\vec{x} ist kontinuierlich und beschränkt, \vec{k} ist quantisiert und unbeschränkt.) Umtransformieren von $\psi(x)$ auf c_k mit $\langle x | k \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{x}}$. Die (Anti-) Kommutatorrelationen gelten wie oben notiert, das δ -Symbol für Operatoren $c_k^{(+)}$ wird zum Kronecker-Delta.

Darstellung von Zuständen

Sei $|\psi\rangle$ ein N -Teilchenzustand, dann läßt sich $|\psi\rangle$ schreiben als

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N!} \int d^3x_1 \dots d^3x_N \psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \psi^+(x_1) \dots \psi^+(x_N) |0\rangle \quad (2.32)$$

mit einer Funktion die o.B.d.A. total (anti-) symmetrisch gewählt sei. Wir erinnern uns dazu, daß

$$P_-(|\vec{x}_1\rangle |\vec{x}_2\rangle \dots |\vec{x}_N\rangle) =: |\vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_N\rangle = \psi^+(\vec{x}_1) \psi^+(\vec{x}_2) \dots \psi^+(\vec{x}_N) |0\rangle \quad (2.33)$$

Offenbar ist die Funktion $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ gerade die Wellenfunktion in 1. Quantisierung.

[Eine gute Übung zum Vertrautwerden: Man sieht durch Anwenden der (Anti-) Kommutatorregeln, daß $\langle \vec{y}_1 \vec{y}_2 \dots \vec{y}_N | \psi \rangle = \psi(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_N)$:

$$\langle \vec{y}_1 \vec{y}_2 \dots \vec{y}_N | \psi \rangle = \frac{1}{N!} \int d^3x_1 \dots d^3x_N \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \langle 0 | \psi(\vec{y}_N) \dots \underbrace{\psi(\vec{y}_1) \psi^+(\vec{x}_1)}_{=\delta(\vec{y}_1 - \vec{x}_1) - \psi^+(\vec{x}_1) \psi(\vec{y}_1)} \dots \psi^+(\vec{x}_N) | 0 \rangle \\
& = \dots = \psi(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_N)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

wobei der $\psi(\vec{y}_1)$ -Operator nach dem Durchziehen nach ganz rechts insgesamt N viele Summanden mit einem $\delta(\dots)$ und je $(N-1)$ vielen Vernichtern und Erzeugern hinterläßt und einen Summanden mit sich selbst vor $|0\rangle$, welcher 0 ergibt. Rekursive Durchführung und Nutzung der Antysymmetrie von $\psi(\dots)$ liefert das Endergebnis. Dies stellt den expliziten Zusammenhang zwischen 1. und 2. Quantisierung dar!]

Wir haben bisher nur eine Teilchenspezies betrachtet. Wir werden häufig Wechselwirkungen von Elektronen (Fermionen) und Photonen (Bosonen) behandeln. Die entsprechenden Zustände werden hier erzeugt von Produkten von fermionischen sowie bosonischen Erzeugern, z.B.

$$a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ b_{q_1}^+ b_{q_2}^+ b_{q_3}^+ |0\rangle \tag{2.35}$$

als Zustand von zwei Fermionen und drei Bosonen mit Impulsen k_1, k_2 , und q_1, q_2, q_3 . (Antikommutieren unter – auch verschiedenen – Fermionen, Kommutieren unter Bosonen und zwischen Bosonen und Fermionen.)

Warum trägt die 2. Quantisierung ihren Namen?

Wir betrachten einen 1-Teilchenoperator “ K_1 ” in 1. Quantisierung, mit der Wirkung auf Wellenfunktionen $\psi(x_1 \dots x_N)$ durch Multiplikation und “hochdimensionale” Integration,

$$(K_1 \cdot \psi)(x_1, \dots, x_N) = \int dy_1 \dots dy_N K_1(\{x\}; \{y\}) \psi(y_1 \dots y_N) \tag{2.36}$$

die wegen der δ -Faktoren im Matrixelement

$$K_1(\{x\}, \{y\}) = \sum_i k_1(x_i; y_i) \cdot \prod_{j \neq i} \delta(x_j - y_j) \tag{2.37}$$

doch niedrigdimensional wird

$$(K_1 \cdot \psi)(x_1, \dots, x_N) = \sum_i \int dy_i k_1(x_i; y_i) \psi(x_1 \dots y_i \dots x_N). \tag{2.38}$$

Dieser allgemeinstmögliche Formalismus führt wieder auf vertrautes Gebiet mit dem

Spezialfall

$$k_1(x; y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \delta(x - y), \quad (2.39)$$

dazu zweimal partiell integrieren.

In 2. Quantisierung erhalten wir

$$K_1 = \int d^3x d^3y \psi^+(x) k_1(x; y) \psi(y) \quad (2.40)$$

Begründung: Wir wenden iterativ die Regel $\psi^+(x)\psi(y)\psi^+(x_i) = \delta(y - x_i)\psi^+(x) + \psi^+(x_i)\psi^+(x)\psi(y)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} & K_1 \cdot \int dx_1 \dots dx_N \psi(x_1 \dots x_N) \psi^+(x_1) \dots \psi^+(x_N) |0\rangle \\ &= \sum_i \int dx_1 \dots dx_N dx dy k_1(x; y) \psi(x_1 \dots x_N) \times \\ & \quad \times \psi^+(x_1) \dots [\psi^+(x) \delta(y - x_i)] \dots \psi^+(x_N) |0\rangle \\ &= \sum_i \int (dx_1 \dots dx_N) [dx_i k_1(x; x_i) \psi(x_1 \dots x_N)] \psi^+(x_1) \dots \psi^+(x) \dots \psi^+(x_N) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.41)$$

Analog lautet ein 2-Teilchen-Operator in 1. Quantisierung

$$K_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_2(x_i, x_j; y_i, y_j) \cdot \prod_{k \neq i, j} \delta(x_k - y_k) \quad (2.42)$$

und in 2. Quantisierung

$$K_2 = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3y_1 d^3y_2 \psi^+(x_1) \psi^+(x_2) k_2(x_1, x_2; y_1, y_2) \psi(y_2) \psi(y_1) \quad (2.43)$$

(Achtung: Reihenfolge). Man sieht, daß die lästigen Summationen verschwinden.

Der Hamiltonoperator für ein System von Teilchen mit kinetischer Energie $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ und Paarwechselwirkung $V(x - y)$ berechnet sich mit k_1 wie in (2.40) und

$$k_2(x_1, x_2; y_1, y_2) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) V(x_1 - x_2) \quad (2.44)$$

zu

$$H = \int d^3x \psi^+(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi(x)$$

$$+\frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^+(x_1) \psi^+(x_2) V(x_1 - x_2) \psi(x_2) \psi(x_1) \quad (2.45)$$

Bemerkung: Ursprung der Bezeichnung 2. Quantisierung: “Wellenfunktion wird zum Operator” und klassische Hamiltonfunktion zum Hamiltonoperator.

2.2 Wicksches Theorem und Rechenregeln, Beweis nach Gaudin

Bevor wir an das Ende des letzten Paragraphen anknüpfen, wollen wir uns fragen, wie wir in wechselwirkungsfreien Theorien Erwartungswerte von beliebigen Produkten von Feldoperatoren berechnen. Es wird sich zeigen, daß dazu die Kenntnis allein von “2-Punkt-Korrelationsfunktionen” von Feldoperatoren ausreichend ist, d.h. Mittelwerte von Produkten von zwei Feldoperatoren. Es gilt

Lemma Seien b, c, d, e, \dots, g, h irgendwelche Feldoperatoren (d.h. $\psi(r), \psi^+(r), c_k$ etc.), so gilt für wechselwirkungsfreie Hamiltonoperatoren H_0 :

$$\begin{aligned} \langle bcde\dots gh \rangle_0 &= \langle bc \rangle_0 \langle de\dots gh \rangle_0 \\ &+ \epsilon \langle bd \rangle_0 \langle c e\dots gh \rangle_0 \\ &+ \epsilon^2 \langle be \rangle_0 \langle cd \dots gh \rangle_0 \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &+ \epsilon^{2m-2} \langle bh \rangle_0 \langle cde\dots g \rangle_0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Bemerkung: hier ist die Anzahl der Feldoperatoren als gerade, $2m$, angenommen worden, da andernfalls beide Seiten gleich 0 wären. Wir haben $\epsilon = 1$ für Bosonen, -1 für Fermionen.

Beweis (Achtung, im Vergleich zu früheren Versionen des Skriptes ist hier die Notation für $[x, y]_\epsilon$ geändert): Da die Aussage linear in jedem Feldoperator ist und jeder solche Operator als Linearkombination der Erzeuger und Vernichter der exakten Energiequanten geschrieben werden kann, wollen wir annehmen, daß $b = c_k^+$ oder c_k und $H_0 = \sum_k \epsilon_k n_k$. Zunächst folgt mittels $[x, y]_\epsilon := xy - \epsilon yx$, also dem Kommutator/Antikommutator für $\epsilon = +1/-1$

$$xy = [x, y]_\epsilon + \epsilon yx, \quad D_0 = \frac{e^{-\beta H_0}}{Z_0}, \quad (2.47)$$

dann rekursiv

$$\begin{aligned}
\langle bcde\dots gh \rangle_0 &= \text{Sp}(D_0 bcde\dots gh) \\
&= \text{Sp}(D_0 [b, c]_\epsilon de\dots gh) \\
&\quad + \epsilon \text{Sp}(D_0 c [b, d]_\epsilon e\dots gh) \\
&\quad + \epsilon^2 \text{Sp}(D_0 cd [b, e]_\epsilon f\dots gh) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \epsilon^{2m-2} \text{Sp}(D_0 cde\dots g [b, h]_\epsilon) \\
&\quad + \epsilon^{2m-1} \underbrace{\text{Sp}(D_0 cde\dots ghb)}_{=\text{Sp}(bD_0 cde\dots gh)}, \tag{2.48}
\end{aligned}$$

wobei wir zuletzt die zyklische Invarianz der Spur benutzt haben.

Der letzte wichtige Schritt ist die Vertauschung von b und D_0 , was nur einen skalaren Faktor liefert. Für $b = c_k^+$ erhalten wir

$$c_k^+ D_0 = e^{\beta\epsilon_k} D_0 c_k^+, \tag{2.49}$$

und für $b = c_k$

$$c_k D_0 = e^{-\beta\epsilon_k} D_0 c_k. \tag{2.50}$$

Wir fassen die linke Seite und den letzten Term auf der rechten Seite zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}
&(1 - \epsilon e^{\pm\beta\epsilon_k}) \text{Sp}(D_0 bcde\dots gh) \\
&= \text{Sp}(D_0 [b, c]_\epsilon de\dots gh) + \epsilon \text{Sp}(D_0 c [b, d]_\epsilon e\dots gh) + \dots \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Nun sehen wir für $m = 1$, d.h. im Produkt gibt es nur zwei Faktoren b und c

$$(1 - \epsilon e^{\pm\beta\epsilon_k}) \text{Sp}(D_0 bc) = \text{Sp}(D_0 [b, c]_\epsilon) = [b, c]_\epsilon \text{Sp} D_0 = [b, c]_\epsilon, \tag{2.52}$$

wobei die zweite Gleichung gilt, da der (Anti-) Kommutator eine Zahl ist (mal Identität). Diese Gleichung, etwas sauberer geschrieben, lautet

$$[b, c]_\epsilon = (1 - \epsilon e^{\pm\beta\epsilon_k}) \text{Sp}(D_0 bc) \cdot \text{id} = (1 - \epsilon e^{\pm\beta\epsilon_k}) \langle bc \rangle_0 \cdot \text{id}. \tag{2.53}$$

Diese Beziehung gilt natürlich für alle Feldoperatoren, also für $c \rightarrow d, e, \dots$. Einsetzen in die obige Beziehung (2.51) und Kürzen von $(1 - \epsilon e^{\pm\beta\epsilon_k})$ liefert (2.46).

Nun folgt schnell per Induktion:

Wicksches Theorem

$$\langle bcde\dots gh \rangle_0 = \sum_{\substack{\text{alle Paarungen } P \\ \text{(Kontraktionen)}}} \epsilon^{\#P} \langle \dots \rangle_0 \langle \dots \rangle_0 \cdots \langle \dots \rangle_0 \quad (2.54)$$

wobei $\#P$ die Anzahl der Transpositionen mißt, die nötig sind, alle Faktoren wie auf der linken Seite vorkommend in die Reihenfolge des betreffenden Summanden auf der rechten Seite überzuführen.

Wieviele Summanden gibt es? Sei $2m$ die Anzahl der Faktoren, dann lautet die Antwort

$$(2m-1)(2m-3)\dots 3 \cdot 1 = \frac{(2m)!}{2m \cdot (2m-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{(2m)!}{2^m m!} \quad (2.55)$$

Beispiel: Sei A ein Operator linear in bosonischen Feldoperatoren, dann gilt

$$\langle e^A \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle A^n \rangle_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \langle A^{2m} \rangle_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} \langle A^2 \rangle_0^m = e^{\frac{1}{2} \langle A^2 \rangle_0} \quad (2.56)$$

Beispiel:

$$\langle bcde \rangle_0 = \langle bc \rangle_0 \langle de \rangle_0 + \epsilon \langle bd \rangle_0 \langle ce \rangle_0 + \epsilon^2 \langle be \rangle_0 \langle cd \rangle_0 \quad (2.57)$$

Dichte-Dichte-Korrelationen in wechselwirkungsfreien Systemen ($x \neq 0$)

$$\begin{aligned} \langle n(x)n(0) \rangle_0 &= \langle \psi(x)^+ \psi(x) \psi(0)^+ \psi(0) \rangle_0 \\ &= \langle \psi(x)^+ \psi(x) \rangle_0 \langle \psi(0)^+ \psi(0) \rangle_0 + \langle \psi(x)^+ \psi(0) \rangle_0 \langle \psi(x) \psi(0)^+ \rangle_0 \\ &= \langle n(x) \rangle_0 \langle n(0) \rangle_0 + \epsilon |\langle \psi(x)^+ \psi(0) \rangle_0|^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

wobei zum Schluß in $\langle \psi(x) \psi(0)^+ \rangle_0$ zunächst die Reihenfolge der Operatoren mit möglichem Vorzeichenwechsel ϵ durchgeführt und dann $\langle A \rangle_0 = \overline{\langle A^+ \rangle_0}$ benutzt wurde. Einzig zu berechnen bleibt

$$\langle \psi(x)^+ \psi(0) \rangle_0 = \frac{1}{V} \sum_k e^{-ikx} \langle c_k^+ c_k \rangle_0 = \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{-ikx}}{e^{\beta \epsilon_k} - \epsilon} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{-ikx}}{e^{\beta \epsilon_k} - \epsilon} \quad (2.59)$$

Interessant ist noch das Verhalten der Grundzustandskorrelationen für freie Fermionen

$$\langle \psi(x)^+ \psi(0) \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\text{Fermikugel}} d^3k e^{-ikx} \quad (2.60)$$

Oder in 1-dim (beachte $k_F = \pi n$):

$$\langle \psi(x)^+ \psi(0) \rangle_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} dk e^{-ikx} = \frac{\sin k_F x}{\pi x} \rightarrow \langle n(x)n(0) \rangle_0 = n^2 - \left| \frac{\sin k_F x}{\pi x} \right|^2 \quad (2.61)$$

Diskussion: $2k_F$ -Oszillationen, Abstoßung durch Pauliprinzip

Nächster Schritt: Wick'sches Theorem für \mathcal{T} -Produkte (später: wenn gebraucht)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T} b(\tau_1) c(\tau_2) d(\tau_3) e(\tau_4) \dots g(\tau_{2k-1}) h(\tau_{2k}) \rangle_0 \\ = \sum_{\substack{\text{alle Paarungen } P \\ \text{(Kontraktionen)}}} \epsilon^{\#P} \langle \mathcal{T} \dots \rangle_0 \langle \mathcal{T} \dots \rangle_0 \dots \langle \mathcal{T} \dots \rangle_0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

wobei wir unter einer elementaren Kontraktion den Mittelwert eines beliebigen zweifachen Produktes in \mathcal{T} -geordneter Form verstehen wollen. Zusätzlich merken wir uns die Parität der Paarung $\#P$.

2.3 Quantisierung des Dirac-Feldes

Wir wollen uns hier das Leben leichter machen und setzen $\hbar = c = 1$ (also keine Unterscheidung zwischen E und ω).

Die (4-komponentigen) Feldoperatoren $\Psi(\vec{x}, t)$, $\Psi^+(\vec{x}, t)$ der freien Dirac-Theorie können bzgl. irgendeiner Basis geschrieben werden. Es ist jedoch praktisch, als 1-Teilchenbasis die Impuls-Energie-Eigenzustände zu benutzen. Die Feldoperatoren nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} + d^+(p, s) v(p, s) e^{ipx}] \quad (2.63a)$$

$$\Psi^+(\vec{x}, t) = \sum_{s=\pm 1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} [b^+(p, s) \underbrace{u^+(p, s)}_{\bar{u}(p, s)\gamma^0} e^{+ipx} + d(p, s) \underbrace{v^+(p, s)}_{\bar{v}(p, s)\gamma^0} e^{-ipx}] \quad (2.63b)$$

mit den Feldoperatoren $b^{(+)}$ und $d^{(+)}$, den Spinoramplituden u und v . Achtung: Hier nutzen wir eine leicht geänderte Notation im Vergleich zu Abschnitt 1.3. Dort hatten wir die positiven und negativen Energiemoden als ue^{-ipx} und ve^{-ipx} geschrieben. Hier sind die positiven (negativen) Energiemoden ue^{-ipx} (ve^{+ipx}) und der 4er-Impuls immer $p = (p_0, \vec{p})$, wobei $p_0 = E_p = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Die Spinor-Amplitude u hat eine große obere Komponente und positive Energie wohingegen v eine große untere Komponente und negative Energie besitzt. Das Impuls-Argument von u und v ist ein 4er-Impuls, bei dem aber immer die 0. Komponente positiv ist. Insofern ist die Notation redundant.

Später tauchen auch Terme wie $u(-p, s)$ auf, wobei mit $-p$ eigentlich $(p_0, -\vec{p})$ gemeint ist.

Bei gegebenen \vec{p} sind je zwei unabhängige Lösungen vorhanden, indiziert mit $s = \pm 1$ (Helizität). Die Spinoperatoren bezeichnen wir mit Σ_a , mit $a = 1, 2, 3$. Nach (1.200) sind diese 4×4 -Matrizen

$$\Sigma_a := \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Der Helizitätsoperator σ ist

$$\sigma := \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (2.65)$$

und kommutiert mit $(\not{p} - m)$, was am einfachsten für den Fall nachgeprüft wird, in dem \vec{p} nur eine Komponente besitzt.

a) Dirac-Gleichung (für ebene Wellen)

$$(\not{p} - m)u(p, s) = 0 \quad (\not{p} + m)v(p, s) = 0 \quad (2.66)$$

$$\bar{u}(p, s)(\not{p} - m) = 0 \quad \bar{v}(p, s)(\not{p} + m) = 0 \quad (2.67)$$

Hier kommt man von der ersten Zeile durch Adjungieren zur zweiten: dabei wechselt das Vorzeichen der γ^k , wird aber durch Kommutieren mit γ^0 zurückgesetzt. Beachte

$$\Psi(x) = u(p, s)e^{-ip^\mu x_\mu} \quad \text{und} \quad \Psi(x) = v(p, s)e^{ip^\mu x_\mu}$$

(mit Vorzeichenwechsel in p_0 und \vec{p} im v -Fall) erfüllen

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$$

b) Wir haben Orthogonalität (wobei wir die Normierung fordern können)

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = \delta_{s,s'} = -\bar{v}(p, s)v(p, s') \quad (2.68)$$

$$u^+(p, s)u(p, s') = \frac{E_p}{m}\delta_{s,s'} = v^+(p, s)v(p, s') \quad (2.69)$$

$$\bar{v}(p, s)u(p, s') = 0 = v^+(p, s)u(-p, s'), \quad (2.70)$$

wobei eigentlich $-p = (p_0, -\vec{p})$ bedeutet.

c) Vollständigkeit

$$\sum_{s=\pm 1} [u_a(p, s)\bar{u}_b(p, s) - v_a(p, s)\bar{v}_b(p, s)] = \delta_{a,b} \quad (2.71)$$

$$\sum_{s=\pm 1} u_a(p, s)\bar{u}_b(p, s) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{a,b} =: (\Lambda_+(p))_{a,b} \quad (2.72)$$

$$-\sum_{s=\pm 1} v_a(p, s)\bar{v}_b(p, s) = \left(\frac{m - \not{p}}{2m}\right)_{a,b} =: (\Lambda_-(p))_{a,b} \quad (2.73)$$

mit Projektoren $\Lambda_+(p)$ ($\Lambda_-(p)$) auf positive (negative) Energie-Lösungen.

Die Feldoperatoren $b^{(+)}$, $d^{(+)}$ aus (2.63) erfüllen nach Forderung:

$$\{b(p, s), b^+(p', s')\} = \delta_{s,s'}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.74a)$$

$$\{d(p, s), d^+(p', s')\} = \delta_{s,s'}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.74b)$$

sowie

$$\{b(\dots), b(\dots)\} = 0 = \{d(\dots), d(\dots)\} \quad (2.74c)$$

$$\{b(\dots), d(\dots)\} = 0 = \{b^+(\dots), d^+(\dots)\} \quad (2.74d)$$

$$\{b(\dots), d^+(\dots)\} = 0 = \{b^+(\dots), d(\dots)\}. \quad (2.74e)$$

Nun folgt die kanonische Antikommutatorrelation für Ψ, Ψ^+ beispielhaft an

$$\{\Psi_a(\vec{x}, t), \Psi_b^+(\vec{x}', t)\} \quad (2.75a)$$

$$= \sum_{s,s'} \int \int \dots (\{b, b^+\} \dots \{d, d^+\} + 0) \quad (2.75b)$$

$$= \sum_{s,s'=\pm 1} \int \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{s,s'} \quad (2.75c)$$

$$\underbrace{(u_a(p, s)u_b^+(p', s') e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} + v_a(p, s)v_b^+(p', s'))}_{\xrightarrow{\sum_{s,s'} \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\gamma^0\right)_{a,b}} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}} \quad (2.75d)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_p} \left(\left(\frac{\not{p} + m}{2m}\gamma^0\right)_{a,b} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} + \left(\frac{\not{p} - m}{2m}\gamma^0\right)_{a,b} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \right) \quad (2.75e)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \delta_{ab} \quad (2.75f)$$

$$= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \delta_{ab}, \quad (2.75g)$$

wobei im letzten Schritt \vec{p} mit $-\vec{p}$ im zweiten Term substituiert wurde. Dadurch kürzen sich die Terme $m\gamma^0$ und $\vec{\gamma}\vec{p}$ raus und übrig bleibt zweimal der Term $p_0\gamma^0\gamma^0 = E_p \cdot 1$.

Nun ergibt sich der Hamiltonoperator \mathbf{H} in zweiter Quantisierung

$$\mathbf{H} = \int d^3x \Psi^\dagger(x) \underbrace{\left[-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m \right]}_{\substack{\text{wirkt auf } e^{\pm ipx} \text{ Faktoren} \\ \text{(bzw. genauer auf } ue^{-ipx}, ve^{+ipx} \text{)} \\ \text{wie Dirac-Hamilton-Operator} \\ e^{\pm ipx} \rightarrow \pm p_0 e^{\pm ipx} (H\Psi = E\Psi, E=p_0)}} \Psi(x) \quad (2.76a)$$

$$= \int d^3x \sum_{s,s'=\pm 1} \int \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} E_{p'} \left[b_{p,s}^+ u_{p,s}^+ e^{ipx} + d_{p,s} v_{p,s}^+ e^{-ipx} \right] \quad (2.76b)$$

$$\cdot \left[b_{p',s'} u_{p',s'} e^{-ip'x} - d_{p',s'}^+ v_{p',s'} e^{ip'x} \right] \quad (2.76c)$$

Eine andere Argumentation zum Wirken des Hamiltonoperators in erster Quantisierung auf die ebenen Wellen ist

$$H = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m = \gamma^0 (-i\gamma^k \partial_k + m) = \gamma^0 (m - \not{p} + \gamma^0 p_0) \rightarrow p_0 \quad (2.76d)$$

Ausmultiplizieren liefert zum einen die Kreuzterme

$$b_{p,s}^+ u_{p,s}^+ d_{p',s'}^+ v_{p',s'} \underbrace{e^{i(p+p')x}}_{\xrightarrow{\int d^3x} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}+\vec{p}')} \quad (2.76e)$$

$$u_{p,s}^+ v_{-p,s'} = 0 \text{ (Orthogonalität)} \quad (2.76f)$$

$$d_{p,s} v_{p,s}^+ b_{p',s'} u_{p',s'} \rightarrow 0 \text{ (analog)} \quad (2.76g)$$

und zum anderen die Diagonalterme

$$b_{p,s}^+ b_{p',s'} \underbrace{u_{p,s}^+ u_{p',s'}}_{= \frac{E_p}{m} \delta_{s,s'}} \underbrace{e^{i(p-p')x}}_{\xrightarrow{\int d^3x} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')} \quad (2.76h)$$

$$- d_{p,s} d_{p',s'}^+ v_{p,s}^+ v_{p',s'} \rightarrow -d_{p,s} d_{p',s'}^+ \frac{E_p}{m} \delta_{s,s'} \text{ (analog)}. \quad (2.76i)$$

Damit folgt dann weiter für den Hamiltonoperator \mathbf{H} :

$$\vdots \quad (2.76j)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{s,s'=\pm 1} \int d^3p m [b_{p,s}^+ b_{p,s'} - d_{p,s} d_{p,s'}^+] \frac{E_p}{m} \delta_{s,s'} \quad (2.76k)$$

$$= \sum_{s=\pm 1} \int d^3p E_p \left[\underbrace{b_{p,s}^+ b_{p,s}}_{\substack{\text{Teilchenzahloperator} \\ \text{zu positiven} \\ \text{Energimoden}}} - \underbrace{d_{p,s} d_{p,s}^+}_{\substack{\dots \text{ zu negativen} \\ \text{Energimoden}}} \right] \quad (2.76l)$$

(2.76l) liefert den erwarteten Ausdruck und verdeutlicht die Rolle der Erzeuger und Vernichter (siehe (2.1))

Tabelle 2.1: Rolle der Erzeuger und Vernichter

Teilchen mit	Vernichter	Erzeuger
pos. Energie	$b(p, s)$ $[d(p, s)]$	$b^+(p, s)$ $[d^+(p, s)]$
neg. Energie	$d^+(p, s)$	$d(p, s)$

und die Antikommutatorrelation

$$-d_{p,s} d_{p,s}^+ = +d_{p,s}^+ d_{p,s} - \underbrace{\{d_{p,s} d_{p,s}^+\}}_{\substack{\text{Zahl (im endlichen Volumen)} \\ \rightarrow \infty}} \quad (2.77)$$

liefert schließlich den Ausdruck

$$\mathbf{H} = \sum_{s,s'=\pm 1} \int d^3p E_p [b_{p,s}^+ b_{p,s} + d_{p,s}^+ d_{p,s}] + \text{Zahl.} \quad (2.78)$$

Diese *Zahl* wird selbst bei einem endlichen Volumen unendlich groß. Die Theorie wird ohne diesen *Offset* **definiert**. Siehe auch: Normalordnung. In dieser Formulierung sind auch d und d^+ Vernichter und Erzeuger positiver Energimoden!

Analog zum Hamilton-Operator erhalten wir aus der zweiten Quantisierung den Impulsoperator $\vec{\mathbf{p}}$

$$\vec{\mathbf{p}} = \int d^3x \Psi^\dagger(-i\vec{\nabla})\Psi \xrightarrow{\Psi \rightarrow \text{Feldoperator}} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \vec{p} [b_{p,s}^+ b_{p,s} - d_{p,s} d_{p,s}^+] \quad (2.79)$$

und unter Berücksichtigung der Antikommutatorrelationen

$$\vec{\mathbf{p}} = \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \vec{p} [b_{p,s}^+ b_{p,s} + d_{p,s}^+ d_{p,s}] , \quad (2.80)$$

wobei die auch hier auftretende “Zahl” aus Symmetriegründen gleich null sein sollte.

Eine weitere Erhaltungsgröße ist die Gesamtladung \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \int d^3x \Psi^\dagger \Psi = \sum_{s=\pm 1} \int d^3p [b_{p,s}^+ b_{p,s} + d_{p,s} d_{p,s}^+] \quad (2.81)$$

$$= \sum_{s=\pm 1} \int d^3p [b_{p,s}^+ b_{p,s} - d_{p,s}^+ d_{p,s}] + \text{Zahl}, \quad (2.82)$$

folglich haben b - und d -Teilchen gleiche (positive) Energien und Impulse, gleiche Masse, aber Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen.

Wir haben hier die zweite Quantisierung auf die Dirac-Gleichung bzw. auf Dirac-Teilchen angewendet, da die Quantennatur dieser Objekte klar ist. Wir werden uns bald der Quantisierung von klassischen Feldern zuwenden. Dort ist der Ausgangspunkt ein ganz anderer. Die Quantennatur muß zunächst erklärt werden. Zur Vorbereitung werden wir dazu im oben behandelten Fall des Dirac-Teilchens eine klassische Feldtheorie “herleiten”, die dann mit “kanonischen Mitteln” behandelt wird bzw. mit der “kanonischen Quantisierung” die gerade hergeleiteten Ausdrücke liefert (operatorwertige Felder, Hamilton-Operator...).

Gehe aus von

$$(i\nabla\!\!\!/ - m)\Psi = 0, \quad (2.83)$$

$$\text{wobei } \nabla\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu \quad (2.84)$$

und $\hbar = c = 1$ (also keine Unterscheidung zwischen E und ω . Wir konstruieren eine Lagrangedichte mit zwei unabhängigen Feldern $\Psi(x)$, $\Psi^*(x)$ (unabhängig, da komplexwertig), indem wir (2.83) von links mit $\delta\bar{\Psi}$ multiplizieren (wobei $\bar{\Psi}(x) := \Psi^*(x)\gamma^0$):

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} d^4x \delta\bar{\Psi}(x) (i\nabla\!\!\!/ - m) \Psi(x) \quad (2.85)$$

$$= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^3} d^4x \bar{\Psi}(x) (i\nabla\!\!\!/ - m) \Psi(x). \quad (2.86)$$

Daraus folgt dann schließlich die Lagrangedichte \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\nabla\!\!\!/ - m) \Psi(x). \quad (2.87)$$

Die Lagrangedichte ist der Ausgangspunkt für alle dynamischen Betrachtungen in der klassischen Physik wie in der Quantenmechanik.

Der zu $\Psi (= \Psi_a)$ konjugierte Impuls Π_a ist

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}_a} = i\Psi_a^*, \quad (2.88)$$

wobei, siehe auch oben, per def.

$$\Psi^{*T} = \bar{\Psi}\gamma^0. \quad (2.89)$$

Der zu Ψ^* konjugierte Impuls ist null. Daraus folgen dann die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\Psi} - \mathcal{L} = \Psi^+(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m)\Psi \quad (2.90)$$

mit $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$, die Hamiltonfunktion H

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \Psi^+(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m)\Psi. \quad (2.91)$$

Beim Übergang von der Lagrange- zur Hamilton-Formulierung wird für das Feld und das kanonische Impuls-Feld die Poissonklammer-Relation gefordert

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \Pi_b(\vec{x}', t)\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.92)$$

wobei hier für Grassmann-Felder (s.u.) die Poissonklammer symmetrisch in den beiden Argumenten definiert ist.

Der erhaltene Impuls \vec{P} erfüllt übrigens (dieser Ausdruck wird noch hergeleitet in 2.6)

$$\vec{P} = \int d^3x \Psi^*(-i\vec{\nabla})\Psi. \quad (2.93)$$

Die kanonische Quantisierungsvorschrift lautet: ersetze alle klassischen Felder durch operatorwertige Felder derart, daß Feld (Ψ_a) und konjugiertes Feld (Π_a) ein Analogon zur Poissonklammer erfüllen, wobei nämlich die Poisson-Klammer durch $-i$ mal Antikommutator ersetzt wird (im Falle bosonischer Teilchen wäre dies $-i$ mal Kommutator)

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \Pi_b(\vec{x}', t)\} = i\delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.94)$$

Bemerkung: Hier in der Dirac-Theorie haben wir die Besonderheit, die in der klassischen Feldtheorie nicht realisiert ist, daß die Felder grundsätzlich nicht kommutieren, sondern antikommutieren. Daher ist das Klammerobjekt oben ein Antikommutator. (Die hier

vorliegende klassische Feldtheorie ist eine mit Grassmann-Feldern.) Benutzen wir noch (2.88) dann erhalten wir

$$\{\psi_a(\vec{x}, t), \psi_b^+(\vec{x}', t)\} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.95)$$

Sodann erhält man Hamilton-, Impuls-Operator durch Ersetzen der klassischen Felder in den Hamilton-, Impuls-Funktionen durch die Feldoperatoren.

2.4 Kontinuumstheorie/-mechanik I

Wir betrachten hier kontinuierliche klassische Felder, für die Bewegungsgleichungen über das Wirkungsprinzip erklärt werden. Wir behandeln zunächst den Fall eines skalaren Feldes $\varphi(x)$ mit Werten in \mathbb{R} . Dies wird später leicht auf mehrere Komponenten und auch Werten in \mathbb{C} erweitert werden.

Das Wirkungsprinzip besagt, daß die Natur einen Zeitverlauf von $\varphi(x)$ (x sei der 4er Raum-Zeit-Vektor) nimmt, so daß die Wirkung S (ein Funktional von φ) stationär ist bei Variation um die physikalische Lösung

$$S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = 0 \cdot \delta\varphi, \quad (2.96)$$

oder: S ist eine differenzierbare Abbildung aus dem Raum der Funktionen φ in \mathbb{R} (oder \mathbb{C}), wobei das Differential δS (eine in diesem Zusammenhang übliche Schreibweise) null ist an den "Punkten φ ", die per definitionem die Bewegungsgleichungen erfüllen.

Üblicherweise ist die Wirkung lokal, d.h. ein Raum-Zeit-Integral über eine Lagrangedichte \mathcal{L} , also einer Funktion von Funktionswerten von $\varphi(x)$ und deren Ableitungen (grundsätzlich beliebiger Ordnung, für übliche Theorien nur bis zu ersten Ableitungen).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) \quad (2.97)$$

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \quad (2.98)$$

Beispiel: Klein-Gordon Feld. Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - m^2 \varphi^2 \right) \quad (2.99)$$

und ist lorentzinvariant.

Das Differential von lokalen Wirkungen berechnet sich wie Sie es wohl aus den Vorlesungen TP I und II kennen könnten: Seien zwei benachbarte Felder φ und $\varphi + \delta\varphi$

gegeben (mit gleichen Werten an den Anfangspunkten bzw. den Endpunkten der Zeit).

Wir werten aus

$$S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\mathcal{L} \left(\varphi + \delta\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x^\mu} \right) - \mathcal{L} \left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \right) \right] \quad (2.100)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial x^\mu} \right] \quad (2.101)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} \right] \delta\varphi \quad (2.102)$$

wobei wir zum Schluß partiell integriert haben. Die räumlichen Oberflächenterme verschwinden, da das Feld (φ sowie $\delta\varphi$) bei $\vec{r} \rightarrow \infty$ verschwindet, die zeitartigen Oberflächenterme sind null, da wir von $\delta\varphi$ verlangen, daß es bei t_1 und t_2 verschwindet.

Bemerkung: Wir haben unsere Herleitung ohne die oft benutzte Notation / Relation $\delta \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta\varphi)$ durchgeführt.

Bemerkung: Mit einer Abhängigkeit der Lagrange-Dichte auch von höheren Ableitungen der Felder hätte die Euler-Lagrange-Gleichung Zusatzterme, welche?

Da nun $S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \delta S \cdot \delta\varphi = 0$ (d.h. δS angewendet auf $\delta\varphi$) für alle $\delta\varphi$ gelten soll, muß die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi/\partial x^\mu)} = 0 \quad (2.103)$$

für $\varphi(x)$ (und alle x) gelten.

Beispiel: Klein-Gordon Feld. Die Euler-Lagrange-Gleichung zur obigen Lagrange-Dichte ist

$$-m^2\varphi - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} = 0 \quad (2.104)$$

also die Klein-Gordon-Gleichung.

Wir haben die lorentzinvariante KG-Gleichung in einem ausgezeichneten Inertialsystem hergeleitet. Wir hatten sogar spezielle raumartige Flächen mit konstantem t gleich t_1 und t_2 benutzt. Wir hätten dieselbe Gleichung auch bei allgemeineren raumartigen Flächen erhalten.

Wir beschreiten nun den Weg zu einer Hamiltonschen Formulierung ("Gleichberechtigung von φ und π ") der klassischen Feldtheorie und gehen zwischendurch in nicht-manifest-kovarianter Weise vor. Wir zeichnen die Zeitkoordinate aus und definieren zum Feld φ den kanonischen Impuls π durch

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \quad (2.105)$$

und φ und π werden als gleichberechtigte und unabhängige Variable behandelt. Die Unabhängigkeit wird durch die Poissonklammer ausgedrückt und die Hamilton-Dichte \mathcal{H} sowie Hamiltonfunktion H eingeführt

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}, \quad H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (2.106)$$

womit das Prinzip der kleinsten Wirkung formuliert werden kann und dann auf die bekannten Hamiltonschen Gleichungen führt.

Wir notieren diese Relationen hier direkt im Kontinuum und begründen sie danach mittels einer Diskretisierung des Raumes:

$$\begin{aligned} \{\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)\} &= 0 \\ \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} &= 0 \\ \{\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.107)$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\vec{x}, t) &= \{\varphi(\vec{x}, t), H\} \\ \dot{\pi}(\vec{x}, t) &= \{\pi(\vec{x}, t), H\} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Zur Begründung der Kontinuumsformulierung: Wir zerlegen den 3-dim. Raum in kleine Volumina ΔV_i (gleicher Größe), dann definieren wir in dem Teil Nr. i das Feld

$$\varphi_i(t) := \frac{1}{\Delta V_i} \int_{\Delta V_i} d^3x \varphi(\vec{x}, t) \quad (2.109)$$

so daß

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \simeq \sum_i \Delta V_i \bar{\mathcal{L}}_i(\dot{\varphi}_i(t), \varphi_i(t), \dots, \varphi_{j \neq i}(t) \dots) \quad (2.110)$$

wobei die Terme mit räumlichen Ableitungen durch geeignete Differenzen von φ_j ausgedrückt werden können. Ein konkretes $\dot{\varphi}_i(t)$ tritt nur in $\bar{\mathcal{L}}_i$ auf. Daher ist der kanonische Impuls p_i zu φ_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = \Delta V_i \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = \Delta V_i \pi_i \quad (2.111)$$

wobei π_i der Zellenmittelwert über ΔV_i von

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \quad (2.112)$$

ist. Die Hamiltonfunktion ist nun

$$H = \sum_i p_i \dot{\varphi}_i - L \simeq \sum_i \Delta V_i (\pi_i \dot{\varphi}_i - \bar{\mathcal{L}}_i) \simeq \int d^3x [\pi(\vec{x}, t) \dot{\varphi}(\vec{x}, t) - \mathcal{L}] = \int d^3x \mathcal{H} \quad (2.113)$$

Es gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \{\varphi_i(t), \varphi_j(t)\} &= 0 \\ \{p_i(t), p_j(t)\} &= 0 \\ \{\varphi_i(t), p_j(t)\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.114)$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i(t) &= \{\varphi_i(t), H\} \\ \dot{p}_i(t) &= \{p_i(t), H\} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Diese Relationen im Limes $\Delta V_i \rightarrow 0$ liefern die Beziehungen (2.107) und (2.108). Beachte dazu

$$\delta_{ij} = \{\varphi_i(t), p_j(t)\} = \Delta V_i \{\varphi_i(t), \pi_j(t)\} \Rightarrow \{\varphi_i(t), \pi_j(t)\} = \frac{1}{\Delta V_i} \delta_{ij} \quad (2.116)$$

was kompatibel mit (2.107) ist

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_i} d^3x \int_{\Delta V_j} d^3x' \{\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} &= \int_{\Delta V_i} d^3x \int_{\Delta V_j} d^3x' \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ \Rightarrow \Delta V_i \Delta V_j \{\varphi_i(t), \pi_j(t)\} &= \Delta V_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Kanonische Quantisierung Ersetze alle klassischen Felder durch operatorwertige Felder derart, daß die Relationen (2.107) und (2.108) gelten, wobei die Poissonklammern durch $-i$ mal Kommutator ersetzt werden

$$\{.,.\} \rightarrow -i[.,.] \quad (2.118)$$

ergibt

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned} \quad (2.119)$$

sowie

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(\vec{x}, t) &= -i[\varphi(\vec{x}, t), H] \\ \dot{\pi}(\vec{x}, t) &= -i[\pi(\vec{x}, t), H]\end{aligned}\tag{2.120}$$

Für ein mehrkomponentiges Feld φ_r erhalten wir natürlich

$$\begin{aligned}[\varphi_r(\vec{x}, t), \varphi_s(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\varphi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] &= i\delta_{rs}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\end{aligned}\tag{2.121}$$

sowie

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_r(\vec{x}, t) &= -i[\varphi_r(\vec{x}, t), H] \\ \dot{\pi}_r(\vec{x}, t) &= -i[\pi_r(\vec{x}, t), H]\end{aligned}\tag{2.122}$$

In der kanonischen Quantisierung benutzt man die klassische Lagrange-Mechanik als Leitfaden und erhält so konsistente Vertauschungsrelationen und Feldgleichungen. Auch die Existenz von Erhaltungsgrößen wird so transparent und kann durch Quantisierung der klassischen Ausdrücke behandelt werden. Wir kommen darauf bald zurück.

Probleme der kanonischen Quantisierung: wie geht man mit Produkten von Feldern und ihren kanonischen Impulsen um (Anordnung)?

2.5 Quantisierung des reellwertigen Klein-Gordon-Feldes

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - m^2\varphi^2\right)\tag{2.123}$$

Der kanonische Impuls ist

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\tag{2.124}$$

Der Hamiltonoperator lautet

$$H = \int d^3x \mathcal{H}\tag{2.125}$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2]\tag{2.126}$$

Wir suchen nun selbstadjungierte Felder $\varphi(x)$ und $\pi(x)$, die die Kommutatorrelationen (bei gleicher Zeit) erfüllen sowie die Zeitentwicklung. Wir notieren die Kommutatoren von φ und π mit der Hamilton-Dichte (Argumente sind 3er-Vektoren)

$$[\varphi(x), \mathcal{H}(x')] = \frac{1}{2} \left[\varphi(x), \pi^2(x') + (\vec{\nabla}\varphi(x'))^2 + m^2\varphi^2(x') \right] \quad (2.127)$$

$$= \frac{1}{2} [\varphi(x), \pi^2(x')] = i\delta^{(3)}(x-x')\pi(x) \quad (2.128)$$

$$[\pi(x), \mathcal{H}(x')] = \frac{1}{2} \left[\pi(x), \pi^2(x') + (\vec{\nabla}\varphi(x'))^2 + m^2\varphi^2(x') \right] \quad (2.129)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\pi(x), (\vec{\nabla}\varphi(x'))^2 + m^2\varphi^2(x') \right] \quad (2.130)$$

$$= -i \left(\vec{\nabla}'\delta^{(3)}(x-x')\vec{\nabla}\varphi(x') + \delta^{(3)}(x-x')m^2\varphi(x) \right) \quad (2.131)$$

Sodann integrieren wir über x' und erhalten

$$[\varphi(x), H] = i\pi(x) \quad (2.132)$$

$$[\pi(x), H] = -i \left(-\vec{\nabla}^2\varphi(x) + m^2\varphi(x) \right) \quad (2.133)$$

Diese Relationen sind für Zeit $x^0 = 0$ hergeleitet worden, gelten aber auch für beliebige Zeiten, also mit allgemeinem 4er-Vektor x und festem H (da H zeitunabhängig ist).

Mit obigen Beziehungen haben wir aber die Bewegungsgleichungen der Felder hergeleitet

$$\dot{\varphi}(x) = \pi(x) \quad (2.134)$$

$$\dot{\pi}(x) = \vec{\nabla}^2\varphi(x) - m^2\varphi(x) \quad (2.135)$$

woraus direkt

$$\ddot{\varphi}(x) = (\vec{\nabla}^2 - m^2)\varphi(x) \quad (2.136)$$

$$\ddot{\pi}(x) = (\vec{\nabla}^2 - m^2)\pi(x) \quad (2.137)$$

und damit sind die Felder Überlagerungen aus ebenen Wellen $\exp(i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t))$ und $\exp(i(\vec{k}\vec{x} + \omega_k t))$ wobei $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ positiv gewählt ist. Die Amplituden dieser Wellen sind operatorwertig und unabhängig von x . Achtung: die ebenen Wellen $\exp(i(\vec{k}\vec{x} + \omega_k t))$ ersetzen wir durch $\exp(i(-\vec{k}\vec{x} + \omega_k t))$, indem wir einfach in dem Überlagerungsintegral

eine Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ vornehmen. Der Ausdruck/Ansatz lautet

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} + a^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_k t} \right] \quad (2.138)$$

wobei $a(\vec{k})$ und $a^+(\vec{k})$ zueinander adjungiert sind, damit φ hermitisch ist. Wir wissen hier noch nicht, daß diese Operatoren die Standard-Kommutatorrelationen erfüllen. Für $\pi(\vec{x}, t)$ benutzen wir $\pi = \dot{\varphi}$ und erhalten

$$\pi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} (-i\omega_k) \left[a(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} - a^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_k t} \right] \quad (2.139)$$

und haben nun die Kommutatorrelationen zu überprüfen und die Zeitentwicklung der Felder

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} \cdot \left([a(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(\vec{k}\vec{x} + \vec{k}'\vec{x}')} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right. \\ &\quad + [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] e^{i(\vec{k}\vec{x} - \vec{k}'\vec{x}')} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \\ &\quad + [a^+(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(-\vec{k}\vec{x} + \vec{k}'\vec{x}')} e^{-i(-\omega_k + \omega_{k'})t} \\ &\quad \left. + [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] e^{i(-\vec{k}\vec{x} - \vec{k}'\vec{x}')} e^{-i(-\omega_k - \omega_{k'})t} \right) \end{aligned} \quad (2.140)$$

Substitutionen und Invarianz der Frequenz unter Vorzeichenwechsel des Impulses liefert

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} e^{i(\vec{k}\vec{x} + \vec{k}'\vec{x}')} \cdot \left([a(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right. \\ &\quad + [a(\vec{k}), a^+(-\vec{k}')] e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \\ &\quad + [a^+(-\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{-i(-\omega_k + \omega_{k'})t} \\ &\quad \left. + [a^+(-\vec{k}), a^+(-\vec{k}')] e^{-i(-\omega_k - \omega_{k'})t} \right) \end{aligned} \quad (2.141)$$

Damit diese Funktion der zwei Variablen x, x' überall null ist, muß die Fouriertransformierte null sein. Das heißt, daß die Summe der vier Terme in der großen Klammer null ist für alle \vec{k}, \vec{k}' . Nun zur t -Abhängigkeit: Da $\omega_k + \omega_{k'}$ nie null und größer als $\omega_k - \omega_{k'}$ ist, folgt

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(-\vec{k}), a^+(-\vec{k}')] = 0 \quad (2.142)$$

Für die Mischterme erhalten wir lediglich ($t = 0$ reicht)

$$[a(\vec{k}), a^+(-\vec{k}')] + [a^+(-\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0. \quad (2.143)$$

Die Kommutatorrelation der π untereinander hilft nicht weiter, aber

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} (-i\omega_{k'}) \cdot \left([a(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(\vec{k}\vec{x} + k'\vec{x}')} e^{-i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right. \\ - [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] e^{i(\vec{k}\vec{x} - k'\vec{x}')} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} \\ + [a^+(\vec{k}), a(\vec{k}')] e^{i(-\vec{k}\vec{x} + k'\vec{x}')} e^{-i(-\omega_k + \omega_{k'})t} \\ \left. - [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] e^{i(-\vec{k}\vec{x} - k'\vec{x}')} e^{-i(-\omega_k - \omega_{k'})t} \right) \end{aligned} \quad (2.144)$$

Der erste und der vierte Term in der Klammer sind 0, der dritte Term wird zum zweiten Term unter Benutzung von (2.143)

$$\left(\dots \right) = -[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] e^{i(\vec{k}\vec{x} - k'\vec{x}')} e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} - [a(-\vec{k}), a^+(-\vec{k}')] e^{i(-\vec{k}\vec{x} + k'\vec{x}')} e^{-i(-\omega_k + \omega_{k'})t} \quad (2.145)$$

Wir führen nun im verbleibenden zweiten Term die Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$, $\vec{k}' \rightarrow -\vec{k}'$ durch und erhalten

$$\left(\dots \right) = -[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] e^{i(\vec{k}\vec{x} - k'\vec{x}')} (e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} + e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t}) \quad (2.146)$$

Da $[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ folgt

$$i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') = \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} (i\omega_{k'}) \cdot [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] (e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} + e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - k'\vec{x}')} \quad (2.147)$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} \omega_{k'} \cdot [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] (e^{-i(\omega_k - \omega_{k'})t} + e^{i(\omega_k - \omega_{k'})t}) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.148)$$

was wiederum äquivalent ist zu

$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.149)$$

Wir schreiben nun den Hamiltonoperator in diesen Erzeugern und Vernichtern,

wobei wir abkürzen $f_k(x) := \exp(i(\vec{k}\vec{x} - \omega_k t)) / \sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int d^3x [\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x d^3k d^3k' \left(\right. \\
&\quad - \left\{ \omega_k \omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' \right\} \left\{ a(k)f_k(x) - a^+(k)f_k^*(x) \right\} \left\{ a(k')f_{k'}(x) - a^+(k')f_{k'}^*(x) \right\} \\
&\quad \left. + m^2 \left\{ a(k)f_k(x) + a^+(k)f_k^*(x) \right\} \left\{ a(k')f_{k'}(x) + a^+(k')f_{k'}^*(x) \right\} \right) \quad (2.150)
\end{aligned}$$

Wir integrieren zunächst über x , was Delta-Funktionen in $\vec{k} \pm \vec{k}'$ liefert, sodann integrieren wir über k'

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left(\underbrace{\left\{ -\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right\}}_{=0} \left\{ a(k)a(-k)e^{-2i\omega_k t} + a^+(k)a^+(-k)e^{2i\omega_k t} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\left\{ \omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2 \right\}}_{=2\omega_k^2} \left\{ a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k) \right\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k [a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)] = \int d^3k \omega_k \left[a^+(k)a(k) \left(+\frac{1}{2} \right) \right], \quad (2.151)
\end{aligned}$$

wobei die additive Konstante $1/2$ sich im Falle eines endlichen Volumens ergibt, spätestens die Summe unendlich ist (im $V = \mathbb{R}^3$ Fall ist dies schon $\delta(0)$), und einfach fallengelassen wird. Der Impulsoperator ergibt sich aus dem klassischen Impuls (noch herzuleiten)

$$\vec{P} = - \int d^3x \pi \vec{\nabla}\varphi \quad (2.152)$$

durch Einsetzen der Felder zu

$$P = \frac{1}{2} \int d^3k \vec{k} [a(k)a^+(k) + a^+(k)a(k)] = \int d^3k \vec{k} \left[a^+(k)a(k) + \frac{1}{2} \right] \quad (2.153)$$

2.6 Quantisierung des komplexen Klein-Gordon-Feldes

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} \left(\varphi, \varphi^*, \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^\mu} \right) = \frac{\partial\varphi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - m^2 \varphi^* \varphi \quad (2.154)$$

Die kanonischen Impulse sind

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^* \quad \text{und} \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} \quad (2.155)$$

Die Hamilton-Dichte ist dann

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} + \pi^* \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = \pi^* \pi + \vec{\nabla} \varphi^* \vec{\nabla} \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \quad (2.156)$$

Wir suchen nun (nicht selbstadjungierte) Felder $\varphi(x)$ und $\pi(x)$, die die Kommutatorrelationen (bei gleicher Zeit)

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= [\varphi^+(x), \varphi^+(y)] = 0, & [\varphi(x), \varphi^+(y)] &= 0 \\ [\pi(x), \pi(y)] &= [\pi^+(x), \pi^+(y)] = 0, & [\pi(x), \pi^+(y)] &= 0 \\ [\pi(x), \varphi^+(y)] &= [\pi^+(x), \varphi(y)] = 0 \\ [\pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] &= [\pi^+(\vec{x}, t), \varphi^+(\vec{y}, t)] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.157)$$

erfüllen sowie die Zeitentwicklung.

Wir schreiben analog zum hermiteschen Skalarfeld

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[a_+(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} + a_-^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_k t} \right] \\ \varphi^+(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[a_+^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_k t} + a_-(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} \right] \end{aligned} \quad (2.158)$$

mit verschiedenen $a_+(\vec{k})$ und $a_-(\vec{k})$, da φ nicht hermitisch ist. Eine Überlegung analog zum hermiteschen Fall liefert

$$\begin{aligned} [a_{\pm}(k), a_{\pm}(k')] &= [a_{\pm}^+(k), a_{\pm}^+(k')] = 0, \quad (\text{vier Fälle}) \\ [a_+(k), a_-^+(k')] &= [a_-(k), a_+^+(k')] = 0 \\ [a_+(k), a_+^+(k')] &= [a_-(k), a_-^+(k')] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (2.159)$$

Wir hätten auch alternativ in der Lagrange-Dichte den Ansatz

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 + i\varphi_2), \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1 - i\varphi_2) \quad (2.160)$$

mit unabhängigen reellwertigen Feldern φ_1, φ_2 machen können. Dies hätte die Lagrange-Dichte in zwei unabhängige Terme von der Art des letzten Abschnitts getrennt. Wir hätten dann quantisiert, d.h. die Felder φ_1 und φ_2 wie bekannt mit Vernichtern / Er-

zeugern $a_1(k)$, $a_1^+(k)$ und $a_2(k)$, $a_2^+(k)$, die Standard-Kommutatorrelationen erfüllen, geschrieben. Beide Ansätze sind kompatibel, wenn

$$\begin{aligned} a_+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{a_1(k) + ia_2(k)\}, & a_+^+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{a_1^+(k) - ia_2^+(k)\} \\ a_-(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{a_1(k) - ia_2(k)\}, & a_-^+(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{a_1^+(k) + ia_2^+(k)\} \end{aligned} \quad (2.161)$$

Offenbar genügen $a_{\pm}(k)$ und $a_{1,2}(k)$ derselben Operatoralgebra.

Für den Hamilton- und den Impuls-Operator finden wir (unter Auslassung der Nullpunktsbeiträge)

$$\begin{aligned} H &= \int d^3k \omega_k [n_+(k) + n_-(k)] = \int d^3k \omega_k [n_1(k) + n_2(k)] \\ \vec{P} &= \int d^3k \vec{k} [n_+(k) + n_-(k)] = \int d^3k \vec{k} [n_1(k) + n_2(k)] \end{aligned} \quad (2.162)$$

Die erhaltene Größe Ladung, zu der eine Kontinuitätsgleichung erfüllt ist, lautet

$$Q = i \int d^3x (\varphi^* \dot{\varphi} - \varphi \dot{\varphi}^*) \quad (2.163)$$

Ersetzen der klassischen Felder durch die quantisierten liefert nach etwas Rechnung

$$Q = \int d^3k [n_+(k) - n_-(k)] \quad (2.164)$$

Damit haben \pm -Teilchen gleiche (positive) Energie und gleichen Impuls, aber Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens.

2.7 Kontinuumstheorie/-mechanik II: Erhaltungsgrößen

Wir leiten hier Erhaltungsgrößen über die Kontinuitätsgleichung her, indem die Stromdichten aus der Existenz von kontinuierlichen Symmetrien der Lagrangedichte konstruiert werden. Dies ist eine Realisierung des Noether-Theorems, das Sie aus der TP 1 kennen.

Innere Symmetrien und Erhaltungsgrößen/Ladungen

Wir betrachten eine Schar von Transformationen $U(\epsilon)$, die Felder $\varphi_r(x)$ ($r = 1, \dots, m$) lokal abbilden auf $\varphi'_r(x)$. Typischerweise sind $U(\epsilon)$ Drehungen oder Ähnliches

im Raum \mathbb{R}^m (oder \mathbb{C}^m). Für kleine ϵ mag eine Linearisierung gelten

$$\varphi'_r(x) = \varphi_r(x) - i\epsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \quad (2.165)$$

wobei λ_{rs} "geeignete" Konstanten sind mit einer impliziten Summation über $s = 1, \dots, m$.

Wir kürzen ab

$$\begin{aligned} \delta\varphi_r(x) &:= \varphi'_r(x) - \varphi_r(x) = -i\epsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \\ \delta\mathcal{L}(x) &:= \mathcal{L}\left(\varphi'_r, \frac{\partial\varphi'_r}{\partial x^\mu}\right) - \mathcal{L}\left(\varphi_r, \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu}\right) \end{aligned} \quad (2.166)$$

Wir betrachten nun den Fall, daß die $U(\epsilon)$ Symmetrien sind, d.h. die Lagrangedichte invariant lassen. In der obigen Linearisierung heißt dies

$$\delta\mathcal{L}(x) = 0 \quad (2.167)$$

Wir setzen nun die Existenz einer solchen kontinuierlichen Symmetrie voraus und wenden diese auf Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen, d.h. auf physikalische Lösungen an und finden 4er-Stromdichten, die die Kontinuitätsgleichung erfüllen, nämlich

$$\begin{aligned} & -i\epsilon \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \lambda_{rs}\varphi_s \right] \\ &= -i\epsilon \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}}_{=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}} \lambda_{rs}\varphi_s - i\epsilon \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \lambda_{rs} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_s \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\varphi_r = \delta\mathcal{L} = 0 \end{aligned} \quad (2.168)$$

Wir haben diese Rechnung in der ersten Zeile mit einem aus dem Hut gezogenen Ansatz für die 4er-Stromdichte begonnen. Wer eine Begründung für diesen Ansatz sucht, lese die Rechnung rückwärts.

Die erhaltene Größe ist

$$Q := \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^0)} \lambda_{rs}\varphi_s = \int d^3x \pi_r \lambda_{rs}\varphi_s \quad (2.169)$$

Translationsinvarianz

Sei ϵ_μ eine kleine (konstante) Translation² mit beliebigen Raum-, Zeit-Anteilen

$$\begin{aligned}\varphi'_r(x) &= \varphi_r(x + \epsilon) \\ \delta\varphi_r(x) &= \varphi_r(x + \epsilon) - \varphi_r(x) = \epsilon_\nu \frac{\partial\varphi_r(x)}{\partial x_\nu}\end{aligned}\quad (2.170)$$

ändert sich die Lagrangedichte um

$$\delta\mathcal{L} := \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \epsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (2.171)$$

Wenn \mathcal{L} nicht explizit von x abhängt, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_r, \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\mu})$, dann ergibt sich die Änderung aus der Änderung des Feldes

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \sum_r \left[\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}}_{= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)}} \delta\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\varphi_r \right] \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\mu)} \delta\varphi_r \right]}_{\text{gilt für Translationen und auch Rotationen}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \epsilon^\nu \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\nu} \right]}_{\text{für Translationen}}\end{aligned}\quad (2.172)$$

Setzen wir beide Ausdrücke gleich, so erhalten wir

$$\epsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \left(\epsilon^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = \epsilon^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\nu} \right] \quad (2.173)$$

was für beliebige, unabhängige ϵ^ν eine Kontinuitätsgleichung darstellt für den (per def.) Energie-Impuls-Tensor \mathcal{J}

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{J}_{\mu\nu} = 0, \quad \mathcal{J}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x_\mu)} \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\nu} \right] \quad (2.174)$$

Für jedes ν ergibt sich eine Erhaltungsgröße, was den 4er-Impuls definiert

$$P_\nu = \int d^3x \mathcal{J}_{0\nu} = \int d^3x \left[\sum_r \pi_r \frac{\partial\varphi_r}{\partial x^\nu} - g_{0\nu} \mathcal{L} \right] \quad (2.175)$$

²Wir benutzen hier durchaus (1.122), also $\psi'(x') = \psi(x)$ mit $x' = x + \epsilon$, dann substituieren wir $x \rightarrow x - \epsilon$, so daß $x' \rightarrow x$ sowie $\psi'(x) = \psi(x - \epsilon)$. Sodann ersetzen wir $\epsilon \rightarrow -\epsilon$. Die Merkmregel "Neue Funktion am neuen Ort gleich alte Funktion am alten Ort" ist äquivalent zu "Neue Funktion am alten Ort gleich alte Funktion am invers transformierten Ort".

Die 0. Komponente ist die Hamilton-Funktion H , \mathcal{J}_{00} ist die Hamiltondichte. Wir wissen, daß

$$\{\varphi_r(x), P_0\} = \dot{\varphi}_r(x) \quad (2.176)$$

Wir quantisieren die Felder und benutzen dieselben Ausdrücke im klassischen Fall

$$[\varphi_r(x), P_0] = i\dot{\varphi}_r(x) \quad (2.177)$$

Nun betrachten wir die Kommutatoren mit den räumlichen Komponenten (wir können und müssen im folgenden $x^0 = x'^0$ voraussetzen, warum?)

$$\begin{aligned} [\varphi_r(x), P_j] &= \int d^3x' \sum_s \left[\varphi_r(x), \pi_s(x') \frac{\partial \varphi_s}{\partial x'^j} \right] \\ &= \int d^3x' \sum_s \underbrace{[\varphi_r(x), \pi_s(x')]}_{i\delta_{r,s}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x'^j} \\ &= i \frac{\partial \varphi_r(x)}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (2.178)$$

Der Operator P_j ist somit der Erzeuger der Translationen im Raum, mit anderen Worten der Impulsoperator.

Rotationsinvarianz

Wir betrachten nun infinitesimale Drehungen (oder auch Lorentz-Boosts). Wir hatten die Darstellungstheorie früher betrieben und infinitesimale Erzeuger $\Delta\omega$ genannt, hier sind es ϵ Symbole. Im allgemeinen Fall, in dem das Feld nicht skalarwertig ist, ergibt sich ein Transformationsverhalten³

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu, \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \\ \varphi'_r(x) &= S_{rs}^{-1}(\epsilon) \varphi_s(x') \end{aligned} \quad (2.179)$$

In der Dirac-Theorie hatten wir gesehen, daß

$$S_{rs}(\epsilon) = \delta_{rs} + \frac{1}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_{rs} \epsilon_{\mu\nu} \quad (2.180)$$

zu wählen ist, damit die Dirac-Gleichung kovariant ist.

³Die nächsten Formeln sind äquivalent zu (1.133), wenn hier $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ gesetzt wird, man findet nämlich "Neue Funktion am alten Ort gleich alte Funktion am invers transformierten Ort", aber mit der Transformation des Spinors nach $S^{-1}(-\epsilon) = S(\epsilon)$.

Im allgemeinen Fall schreiben wir

$$\begin{aligned} S_{rs}(\epsilon) &= \delta_{rs} + \frac{1}{2} \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \\ \delta\varphi_r &= \epsilon_{\mu\nu} \left[x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_r - \frac{1}{2} \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \varphi_s \right] \end{aligned} \quad (2.181)$$

Wie oben erhalten wir sowohl

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon_{\mu\nu} x^\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (2.182)$$

als auch

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\lambda)} \delta\varphi_r \quad (2.183)$$

Dies wollen wir als Produkt von $\epsilon_{\mu\nu}$ mit einem antisymmetrischen Term in $\mu\nu$ schreiben

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\mu} x^\nu \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\nu} x^\mu \mathcal{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (g^{\lambda\mu} x^\nu - g^{\lambda\nu} x^\mu) \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.184)$$

Nun auch

$$\begin{aligned} \delta\varphi_r &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \left[\left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \varphi_r - \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \varphi_s \right] \\ \delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\lambda)} \left[\left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \varphi_r - \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \varphi_s \right] \end{aligned} \quad (2.185)$$

Da ϵ (bis auf die Antisymmetrie) beliebig war

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ (g^{\lambda\nu} x^\mu - g^{\lambda\mu} x^\nu) \mathcal{L} + \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\lambda)} \left[\left(x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \varphi_r + \Sigma_{rs}^{\nu\mu} \varphi_s \right] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left\{ (x^\nu \mathcal{J}^{\lambda\mu} - x^\mu \mathcal{J}^{\lambda\nu}) + \sum_r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_r/\partial x^\lambda)} \Sigma_{rs}^{\nu\mu} \varphi_s \right\} \end{aligned} \quad (2.186)$$

Das Object in runden Klammern mögen wir $\mathcal{M}^{\lambda\nu\mu}$ nennen und ist eine erhaltene Stromdichte. Die erhaltene Größe ist der Drehimpuls

$$M^{\nu\mu} = \int d^3x \mathcal{M}^{0\nu\mu} = \int d^3x \left\{ (x^\nu \mathcal{J}^{0\mu} - x^\mu \mathcal{J}^{0\nu}) + \sum_r \pi_r \Sigma_{rs}^{\nu\mu} \varphi_s \right\} \quad (2.187)$$

Dies quantisiert liefert tatsächlich den infinitesimalen Erzeuger der Drehungen, denn

$$[\varphi_r(x), M^{\nu\mu}] = i \left(x^\nu \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\mu} - x^\mu \frac{\partial \varphi_r}{\partial x^\nu} + \Sigma_{rs}^{\nu\mu} \varphi_s(x) \right) \quad (2.188)$$

2.8 Green'sche Funktionen und Propagatoren

Physikalische Messungen von Leitfähigkeiten, kalorimetrischen Größen und Suszeptibilitäten allgemein, Neutron-, Elektron-Streuexperimente etc. stellen ein Ausmessen von Korrelationsfunktionen dar. Die elementaren Korrelationsfunktion, die im idealen Teilchengasfall über das Wick-Theorem die zusammengesetzten, meßbaren Korrelationsfunktionen liefern, sind die sogenannten 1-Teilchen-Greens Funktionen bzw. Propagatoren. Auch im Wechselwirkungsfall sind diese Funktionen von großer Bedeutung, das sie elementare Objekte der Störungstheorie sind und in Feynman-Diagrammen durch Propagationslinien repräsentiert werden.

Wir werden hier natürlich nicht die Störungstheorie entwickeln können, geben aber die allgemeine Definition des Feynman-Propagators und werten diesen für wechselwirkungsfreie KG- und Dirac-Felder aus.

Geladenes Skalarfeld

Wir definieren

$$\Delta_F(x - x') := -i \langle 0 | \mathcal{T} (\varphi(x) \varphi^+(x')) | 0 \rangle \quad (2.189)$$

wobei der *Zeitordnungsoperator* allgemein wie folgt definiert ist

$$\mathcal{T} (a(x)b(x')) = a(x)b(x')\theta(t - t') \pm b(x')a(x)\theta(t' - t) \quad (2.190)$$

mit oberem/unterem Vorzeichen für bosonische/fermionische Felder. Explizit (bosonischer Fall)

$$\Delta_F(x - x') := -i \langle 0 | \varphi(x) \varphi^+(x') | 0 \rangle \theta(t - t') - i \langle 0 | \varphi^+(x') \varphi(x) | 0 \rangle \theta(t' - t) \quad (2.191)$$

Es gilt

$$(\square + m^2) \Delta_F(x - x') = -\delta^{(4)}(x - x') \quad (2.192)$$

was wir durch Einsetzen der Felder als Fouriertransformierte der Erzeuger und Vernichter von Energiemoden zeigen werden. Evtl. gelingt auch ein direkter Zugang wie

er unten im Dirac-Fall angedeutet wird.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[a_+(\vec{k}) e^{-ikx} + a_-(\vec{k}) e^{ikx} \right] \\ \varphi^+(x') &= \int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} \left[a_+(\vec{k}') e^{ik'x'} + a_-(\vec{k}') e^{-ik'x'} \right]\end{aligned}\quad (2.193)$$

mit 4er-Impuls $k = (\omega_k, \vec{k})$ und grundsätzlich positivem ω_k . Wir berechnen nun den Vakuum Erwartungswert und brauchen aus bekannten Gründen (Teilchenzahl-Argument) im Produkt nur Terme vom Typ aa^+ zu berücksichtigen

$$\begin{aligned}\langle 0 | \varphi(x) \varphi^+(x') | 0 \rangle &= \\ &= \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k 2\omega_{k'}}} e^{i(k'x' - kx)} \langle 0 | a_+(\vec{k}) a_+(\vec{k}') | 0 \rangle\end{aligned}\quad (2.194)$$

Da

$$a_+(\vec{k}) a_+(\vec{k}') = \underbrace{\left[a_+(\vec{k}), a_+(\vec{k}') \right]}_{=\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')} + \underbrace{a_+(\vec{k}') a_+(\vec{k})}_{\rightarrow 0}\quad (2.195)$$

wobei der zweite Term im Erwartungswert verschwindet. Damit finden wir sofort

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi^+(x') | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x'-x)}\quad (2.196)$$

Analog finden wir

$$\langle 0 | \varphi^+(x') \varphi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{ik(x-x')}\quad (2.197)$$

so daß

$$\Delta_F(x-x') = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[e^{-ik(x-x')} \theta(t-t') + e^{-ik(x'-x)} \theta(t'-t) \right]\quad (2.198)$$

also eine Überlagerung von ebenen Wellen positiver Energie, die in beiden Fällen in zeitlicher Vorwärtsrichtung propagieren.

Wir wollen das 3-dim. Integral in folgendes 4-dim Integral

$$\Delta_F(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-x')}, \quad (\epsilon \rightarrow 0^+)\quad (2.199)$$

umschreiben. Hier ist $k = (k_0, \vec{k})$ und k_0 ist eine Integrationsvariable, die über die ganze

reelle Achse läuft. Der Nenner

$$k^2 - m^2 + i\epsilon = k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon = k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon \quad (2.200)$$

hat zwei Nullstellen in der Nähe von $\pm\omega_k$: $k_0 = \pm\omega_k + \delta$

$$0 = k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon = \pm 2\omega_k\delta + \delta^2 + i\epsilon \quad (2.201)$$

hat unter Vernachlässigung von δ^2 die Lösung $\delta = \mp i\epsilon/\omega_k$. Die Nullstelle bzw. der Pol des Integranden mit positivem/negativem Realteil liegt leicht unterhalb/oberhalb der reellen Achse. Wir rechnen

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t-t')} \quad (2.202)$$

mit funktionstheoretischen Mitteln. Wir können für $t-t' > 0$ den Integrationsweg durch Hinzufügen eines großen Halbkreisbogens in der unteren Halbebene schließen, ohne den Wert des Integrals zu ändern (der Integrand verschwindet auf dem zugefügten Teilweg). Für $t-t' < 0$ schließen wir den Integrationsweg in der oberen Halbebene, ohne den Wert zu ändern.

Der Wert des sich jeweils ergebenden geschlossenen Konturintegrals wird mit dem Residuensatz ermittelt. In beiden Fällen gibt es genau eine Polstelle, die beiträgt. Das Residuum ergibt sich durch Ableiten des genannten Nenners nach k_0 mit anschließendem Einsetzen der Nullstelle. Beachte den Vorzeichenwechsel bei Änderung des Umlaufsinn der Kontur.

Für $t-t' > 0$ wird die Polstelle mit positivem Realteil in der unteren Halbebene mit negativem Umlaufsinn umlaufen

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t-t')} = -\frac{2\pi i}{2\pi} \frac{1}{2\omega_k} e^{-i\omega_k(t-t')} \quad (2.203)$$

Setzen wir dies in (2.208) ein, ergibt sich (2.198) im Falle $t-t' > 0$.

Für $t-t' < 0$ wird die Polstelle mit negativem Realteil in der oberen Halbebene mit positivem Umlaufsinn umlaufen

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{k_0^2 - \omega_k^2 + i\epsilon} e^{-ik_0(t-t')} = \frac{2\pi i}{2\pi} \frac{1}{-2\omega_k} e^{i\omega_k(t-t')} \quad (2.204)$$

Setzen wir dies in (2.208) ein und nehmen die Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ vor, ergibt sich (2.198) im Falle $t-t' < 0$.

Nun sehen wir auch

$$(\square + m^2)\Delta_F(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 + m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-x')} = -\delta^{(4)}(x - x') \quad (2.205)$$

Bemerkung: Δ_F ist eine Greensche Funktion. Statt des Integrationsweges entlang der reellen Achse leicht unterhalb/oberhalb des Pols bei $\mp\omega_k$, kann man auch beide Polstellen oberhalb (unterhalb) umlaufen und erhält so die retardierte (avancierte) Greensche Funktion mit Beiträgen nur für $t - t' > 0$ ($t - t' < 0$), aber mit sowohl positiver als auch negativer Energie.

Dirac Feld

Abschließend wollen wir noch definieren

$$S_F(x - x')_{\beta\alpha} := -i\langle 0|\mathcal{T}(\psi_\beta(x)\bar{\psi}_\alpha(x'))|0\rangle \quad (2.206)$$

beschreibt Propagation von Wellen positiver Frequenz (Energie) in Vorwärtsrichtung.

Man sieht “elementar”, daß

$$(i\nabla - m)S_F(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (2.207)$$

Dazu benutzt man $(i\nabla - m)\psi(x) = 0$ und die Definition von S_F über die Erwartungswerte multipliziert mit Theta-Funktionen. Die Zeitableitung liefert dann zwei Terme mit Delta-Funktionen in der Zeit, welche im wesentlichen zum Antikommutator von $\psi_\beta(x)$ und $\psi_\alpha^+(x')$ bei $t = t'$ führen. Dies liefert dann die 3-dim Delta-Funktion.

Wir finden aber auch über die Entwicklung nach Erzeugern und Vernichtern von Energiemoden

$$S_F(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-x')}, \quad (\epsilon \rightarrow 0^+) \quad (2.208)$$

wobei der Bruch zu $1/(\not{k} - m)$ vereinfacht werden kann, wenn der Weg wie im KG-Fall gewählt wird.

3 Pfadintegrale

Die Pfadintegralquantisierung erlaubt z.B. die Berechnung der Zeitevolution eines Zustandes durch klassische Daten: Summe/Integral über die Menge aller möglichen Wege von Anfangs- zu Endkonfiguration, wobei der Integrand das Exponential der Wirkung des jeweiligen Weges ist. Dieser Zugang benötigt keine Operatoren, kann aber aus der

kanonischen Quantisierung hergeleitet werden. Die Pfadintegralmethode geht auf (Wiener), Dirac, Feynman (!), Schwinger zurück. Weiteres Stichwort: Trotter-Zerlegung.

Die Pfadintegraldarstellung hat verschiedene Anwendungen. Zum einen lassen sich mit ihr das Wick-Theorem und die Störungstheorie bzw. Feynman-Diagramme herleiten. Zum anderen ist die Pfadintegraldarstellung die Grundlage der Behandlung von Quantenfeldtheorien mittels Monte-Carlo-Simulationen.

3.1 Einführung

Wir führen die Standard-Übung durch, ein einziges Teilchen in einem Potential V . Um gewisse Gaußintegrale möglichst simpel zu halten, beschränken wir uns ferner auf Raumdimension $d = 1$. Wir folgen der Notation von Cheng+Li (2000). Orts- und Impulsoperator heißen Q und P , der Hamiltonoperator ist

$$H(P, Q) = \frac{P^2}{2m} + V(Q), \quad (3.1)$$

wobei dieser “Ausdruck” später auch für klassische Größen benutzt wird. Wir interessieren uns für das Übergangsmatrixelement

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle, \quad (3.2)$$

wobei die Zustände $|q\rangle$, $|q'\rangle$ Eigenzustände zum Ortsoperator sind. Mit der Kenntnis der Übergangsmatrixelemente kann dann z.B. auch die Wellenfunktion eines Zustandes ψ zur Zeit t' aus der zur Zeit t berechnet werden

$$\psi(q', t') = \langle q' | \psi(t') \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | \psi(t) \rangle = \int dq \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle \langle q | \psi(t) \rangle \quad (3.3)$$

$$= \int dq \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle \psi(q, t) \quad (3.4)$$

Zur Einordnung: $|\psi\rangle$, $|q\rangle$ sind Zustände im Heisenbergbild bzw. im Schrödingerbild zur Zeit 0, $|\psi(t)\rangle$, $|q(t)\rangle$ sind Zustände im Schrödingerbild zur Zeit t . Um später Mißverständnisse zu vermeiden, schreiben wir $|q, t\rangle \equiv |q(t)\rangle$. Das Übergangsmatrixelement ist damit

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle. \quad (3.5)$$

Wir zerlegen nun das Zeitintervall in n Teile der Länge $\delta t = (t' - t)/n$. Die Übergangsamplitude kann nun geschrieben werden als

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \int dq_1 \dots dq_{n-1} \langle q' | e^{-iH\delta t} | q_{n-1} \rangle \langle q_{n-1} | e^{-iH\delta t} | q_{n-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q \rangle . \quad (3.6)$$

Wir können nun die Exponentiale entwickeln, da die Argumente klein sind

$$\langle q' | e^{-iH\delta t} | q \rangle = \langle q' | [1 - iH\delta t] | q \rangle + \mathcal{O}(\delta t^2) . \quad (3.7)$$

Für den Hamiltonoperator mit kinetischer und potentieller Energie gilt

$$\langle q' | H(P, Q) | q \rangle = \langle q' | \frac{P^2}{2m} | q \rangle + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \delta(q' - q) \quad (3.8)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} \langle q' | p \rangle \langle p | \frac{P^2}{2m} | q \rangle + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \quad (3.9)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \right] , \quad (3.10)$$

wobei in der ersten Zeile das Skalarprodukt zweier Eigenzustände zum Ortsoperator die δ -Funktion lieferte, wir in der zweiten Zeile ein vollständiges System von Eigenzuständen $|p\rangle$ des Impulsoperators eingeführt haben mit den bekannten Skalarprodukten mit den Eigenzuständen des Ortsoperators und der Darstellung der δ -Funktion. Schritt für Schritt sind aus Operatoren Zahlen geworden auf Kosten der Einführung von Integralen.

Wir fassen die Beiträge zur Übergangsamplitude zusammen

$$\langle q' | e^{-iH\delta t} | q \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} \left\{ 1 - i\delta t \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{q+q'}{2}\right) \right] \right\} \quad (3.11)$$

$$= \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q'-q)} e^{-i\delta t H(p, (q+q')/2)} . \quad (3.12)$$

Dies wenden wir für jedes Teilintervall an und erhalten so

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle &= \int \frac{dp_1}{2\pi} \dots \frac{dp_n}{2\pi} \int dq_1 \dots dq_{n-1} \\ &\exp\left(i \sum_{j=1}^n [p_j(q_j - q_{j-1}) - \delta t H(p_j, (q_j + q_{j-1})/2)]\right) , \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei $q_0 = q$ und $q_n = q'$. Als nächstes benutzen wir, daß die Impulsvariable in H quadratisch eingeht und wir die p -Integrale als Gaußintegrale explizit ausführen können, wobei wir der Zeitdifferenz einen kleinen Imaginärteil zufügen, so daß $i\delta t$ einen kleinen

positiven Realteil besitzt. Wir benutzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{-ax^2+bx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{b^2/4a}, \quad (3.14)$$

wobei a, b komplexe Zahlen sind, wobei a einen positiven Realteil besitzt. Wir erhalten

$$\int \frac{dp_j}{2\pi} \exp\left(-\frac{i\delta t}{2m} p_j^2 + ip_j(q_j - q_{j-1})\right) = \left(\frac{m}{2\pi i\delta t}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im(q_j - q_{j-1})^2}{2\delta t}\right] \quad (3.15)$$

Das Mehrfachintegral über p_j und q_j Variable wird nun zu

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i\delta t}\right)^{n/2} \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp\left(i \sum_{j=1}^n \delta t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\delta t}\right)^2 - V\right]\right), \quad (3.16)$$

im Limes $n \rightarrow \infty$. In diesem Grenzfall wird aus dem Differenzenquotienten im Exponenten die Geschwindigkeit \dot{q} und die Summe im Exponenten zum Zeitintegral über einen Ausdruck, der Funktionswerte und Ableitungen eines Weges $q(\tau)$ enthält. Das Mehrfachintegral $\int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j$ wird zum (Funktional-) Integral über alle derartigen Wege $q(\tau)$, die in $q(t) = q$ beginnen und in $q(t') = q'$ enden.

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = N \int [dq] \exp\left(i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{m}{2} \dot{q}(\tau)^2 - V(q(\tau))\right]\right), \quad (3.17)$$

Die Symbole $[dq]$ und N bezeichnen das Integrationsmaß und die Normierung, die nur zusammen und als Grenzwert der obigen Diskretisierung verstanden werden. Wir bemerken, daß der Ausdruck in eckigen Klammern gerade die Lagrangefunktion ist $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)$. Alternativ bekommen wir

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = N \int [dq] \exp\left(i \int_t^{t'} d\tau L(q, \dot{q})\right), \quad (3.18)$$

wie angekündigt.

Bemerkung (i): Das Integral (3.13) hätte auch als Pfadintegral

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \tilde{N} \int [dpdq] \exp\left(i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)]\right), \quad (3.19)$$

mit unabhängigen Funktionen $p(\tau)$ und $q(\tau)$ geschrieben werden können, aber mit Randbedingung $q(t) = q, q(t') = q'$.

Bemerkung (ii): Für Korrelationsfunktionen bekommen wir jetzt direkt

$$\begin{aligned} & \langle q' | \exp(-iH(t' - t)) \mathcal{T} [Q(t_1) \dots Q(t_n)] | q \rangle \\ &= \tilde{N} \int [dpdq] q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left(i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H(p, q)] \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$= N \int [dq] q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left(i \int_t^{t'} d\tau L(q, \dot{q}) \right), \quad (3.21)$$

wobei \mathcal{T} das Zeitordnungssymbol ist. Ohne dieses Symbol und bei Zeiten, die nicht wie $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ angeordnet sind, wären sehr ähnlich aussehende Integrale das Ergebnis, aber mit Pfaden $q(\tau)$, die stückweis definiert sind auf überlappenden Teilintervallen.

Bemerkung (iii): Diffusionsgleichungen können analog mit Pfadintegralen “gelöst” werden (Wiener).

3.2 Kohärente Zustände

3.2.1 Bosonische Systeme

Wir betrachten hier Quantenfeldtheorien in beliebigen Raumdimensionen d . Wir entwickeln zunächst den bosonischen Fall.

Zum Aufwärmen: 0-dimensionales, bosonisches Vielteilchensystem mit Wechselwirkung. Dies soll heißen: wir betrachten ein Quantenfeld ohne kontinuierlichen (Ort-, Impuls) Index und einen Hamiltonoperator wie folgt

$$H = H(\Phi^+, \Phi) = \Phi^+ \Phi + V(\Phi^+, \Phi), \quad [\Phi, \Phi^+] = 1 \quad (3.22)$$

$$V \text{ normalgeordnet, d.h. } V = \sum_{n,m} V_{n,m} (\Phi^+)^n \Phi^m, \quad (3.23)$$

das Vakuum sei $|0\rangle$, also $\Phi |0\rangle = 0$ und $\langle 0|0\rangle = 1$.

Eine vielleicht verwirrende Bemerkung: die hier ins Auge gefaßte 0-dimensionale Quantenfeldtheorie ist mehr oder minder äquivalent zu einem eindimensionalen quantenmechanischen Teilchen in einem Potential, siehe (an-) harmonischer Oszillator.

Wir wollen u.a. alternative Formeln für die Zustandssumme $\text{Sp} e^{-\beta H}$ herleiten, d.h. solche, die nicht die explizite Diagonalisierung des Hamiltonoperators H benutzen. Dazu führen wir kohärente Zustände ein

$$|\varphi\rangle := \exp(\varphi \cdot \Phi^+) |0\rangle, \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathbb{C}. \quad (3.24)$$

Wir werden bald kohärente Fermionenzustände kennenlernen und evtl. auch spinkohärente Zustände.

Kohärente Zustände zeigen minimale Unschärfe. Für uns sind hier die folgenden Eigenschaften wichtig

$$(i) \quad (|\varphi\rangle)_{\varphi \in \mathbb{C}} \text{ ist vollständig} \quad (3.25)$$

$$(ii) \quad \Phi |\varphi\rangle = \varphi |\varphi\rangle \quad (3.26)$$

$$(iii) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \exp(\bar{\alpha}\beta) \quad (3.27)$$

$$(iv) \quad \text{Darstellung der Eins} \quad 1 = \int \frac{d\bar{\varphi}d\varphi}{2\pi i} e^{-\bar{\varphi}\varphi} |\varphi\rangle \langle \varphi| \quad (3.28)$$

wobei mit dem Integrationsmaß gemeint ist

$$d\bar{\varphi}d\varphi = d\bar{\varphi} \wedge d\varphi = d(x - iy) \wedge d(x + iy) = 2idx \wedge dy, \quad (3.29)$$

und das Integral ist das einer 2-Form über die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^2 .

$$\text{Beweis: (i) Ableitungen nach } \varphi \text{ erzeugen alle } (\Phi^+)^n |0\rangle. \quad (3.30)$$

$$(iii) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \langle 0 | \exp(\bar{\alpha}\Phi) \exp(\beta\Phi^+) |0\rangle \quad (3.31)$$

$$= \langle 0 | \exp(\beta\Phi^+) \exp(\bar{\alpha}\Phi) \exp([\bar{\alpha}\Phi, \beta\Phi^+]) |0\rangle \quad (3.32)$$

$$= 1 \cdot \exp(\bar{\alpha}\beta) \quad (3.33)$$

$$(ii) \quad \frac{d}{d\bar{\alpha}}(iii) \rightarrow \langle \alpha | \Phi | \beta \rangle = \beta \exp(\bar{\alpha}\beta) = \beta \langle \alpha | \beta \rangle \rightarrow \text{Behauptung} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} (iv) \quad \langle \alpha | \text{Integralausdruck} | \beta \rangle &= \int \frac{d\bar{\varphi}d\varphi}{2\pi i} e^{-\bar{\varphi}\varphi} \underbrace{\langle \alpha | \varphi \rangle \langle \varphi | \beta \rangle}_{\exp(\bar{\alpha}\varphi + \bar{\varphi}\beta)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int dx e^{-x^2 + (\bar{\alpha} + \beta)x} \int dy e^{-y^2 + i(\bar{\alpha} - \beta)y} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\pi} e^{\frac{(\bar{\alpha} + \beta)^2}{4}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\bar{\alpha} - \beta)^2}{4}} = e^{\bar{\alpha}\beta} = \langle \alpha | \beta \rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

Aus der Darstellung der Eins folgt auch die Spurformel

$$\text{Sp } A = \int \frac{d\bar{\varphi}d\varphi}{2\pi i} e^{-\bar{\varphi}\varphi} \text{Sp} |\varphi\rangle \langle \varphi| A = \int \frac{d\bar{\varphi}d\varphi}{2\pi i} e^{-\bar{\varphi}\varphi} \langle \varphi | A | \varphi \rangle. \quad (3.36)$$

Wir “berechnen” nun die Zustandssumme mittels Trotter-Zerlegung ($N \rightarrow \infty$),

Einschieben von Darstellungen der Eins und Spurbildung mit $\varphi_0 = \varphi_N$

$$Z = \text{Sp} e^{-\beta H} = \text{Sp} \left(e^{-\frac{\beta}{N} H} \right)^N \quad (3.37)$$

$$= \int \prod_{j=1}^N \frac{d\bar{\varphi}_j d\varphi_j}{2\pi i} e^{-\bar{\varphi}_j \varphi_j} \underbrace{\langle \varphi_j | e^{-\frac{\beta}{N} H(\Phi^+, \Phi)} | \varphi_{j-1} \rangle}_{\simeq \underbrace{\langle \varphi_j | \varphi_{j-1} \rangle}_{\exp(\bar{\varphi}_j \varphi_{j-1})} \exp(-\frac{\beta}{N} H(\bar{\varphi}_j, \varphi_{j-1}))} \quad (3.38)$$

$$= \int \left(\prod_{j=1}^N \frac{d\bar{\varphi}_j d\varphi_j}{2\pi i} \right) \exp \left[\sum_{j=1}^N \left(\underbrace{\bar{\varphi}_j (\varphi_{j-1} - \varphi_j)}_{-\dot{\varphi} \cdot \frac{\beta}{N}} - \frac{\beta}{N} H(\bar{\varphi}_j, \varphi_{j-1}) \right) \right] \quad (3.39)$$

$$=: \int [d\bar{\varphi} d\varphi] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau (\bar{\varphi} \dot{\varphi} + H(\bar{\varphi}, \varphi)) \right) \quad (3.40)$$

wobei die Wege periodisch sind $\varphi(\beta) = \varphi(0)$.

Die Übergangsamplitude ist: wieder Trotterzerlegung mit N Teilintervallen, $N - 1$ inneren Intervallgrenzen und $N - 1$ Integralen, $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_N = \varphi'$

$$\begin{aligned} & \langle \varphi' | e^{-iH(t'-t)} | \varphi \rangle \\ &= \int \left(\prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\bar{\varphi}_j d\varphi_j}{2\pi i} e^{-\bar{\varphi}_j \varphi_j} \right) \prod_{j=1}^N \underbrace{\langle \varphi_j | e^{-i\delta t H(\Phi^+, \Phi)} | \varphi_{j-1} \rangle}_{\simeq \underbrace{\langle \varphi_j | \varphi_{j-1} \rangle}_{\exp(\bar{\varphi}_j \varphi_{j-1})} \exp(-i\delta t H(\bar{\varphi}_j, \varphi_{j-1}))} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$= \int \left(\prod_{j=1}^{N-1} \frac{d\bar{\varphi}_j d\varphi_j}{2\pi i} \right) \exp \left[\bar{\varphi}_N \varphi_N + \sum_{j=1}^N \left(\underbrace{\bar{\varphi}_j (\varphi_{j-1} - \varphi_j)}_{-\dot{\varphi} \cdot \delta t} - i\delta t H(\bar{\varphi}_j, \varphi_{j-1}) \right) \right] \quad (3.42)$$

$$=: \int [d\bar{\varphi} d\varphi] \exp \left(\bar{\varphi}(t') \varphi(t') - \int_t^{t'} d\tau [\bar{\varphi} \dot{\varphi} + iH(\bar{\varphi}, \varphi)] \right) \quad (3.43)$$

Wir sehen, daß die Exponenten in (3.40) und (3.43) durch eine Wick-Rotation ineinander übergehen, d.h. durch “analytische Fortsetzung” (wobei hier die Randbedingungen ein wenig stören):

$$\beta \rightarrow i(t' - t), \quad d\tau \rightarrow i d\tau. \quad (3.44)$$

Wenn dann auch das Argument τ von φ durch $i\tau$ ersetzt wird, so bleibt die Kombination $d\tau \dot{\varphi}$ invariant, aber H wird zu iH .

Wir können das Ergebnis (3.43) symmetrisieren

$$\int_t^{t'} d\tau \bar{\varphi} \dot{\varphi} = \bar{\varphi} \varphi \Big|_t^{t'} - \int_t^{t'} d\tau \dot{\bar{\varphi}} \varphi \quad (3.45)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \langle \varphi' | e^{-iH(t'-t)} | \varphi \rangle \\ &= \int [d\bar{\varphi} d\varphi] \exp \left(\underbrace{\frac{\bar{\varphi}(t')\varphi(t') + \bar{\varphi}(t)\varphi(t)}{2}}_{\text{Norm der Zustände } \varphi', \varphi} + i \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{\dot{\bar{\varphi}}\varphi - \bar{\varphi}\dot{\varphi}}{2i} - H(\bar{\varphi}, \varphi) \right] \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

mit Wegen $\varphi(\tau)$ mit Randbedingungen $\varphi(t') = \varphi'$ und $\varphi(t) = \varphi$. Nun haben wir wieder eine Darstellung wie in (3.19) gefunden, denn

$$L = \frac{\dot{\bar{\varphi}}\varphi - \bar{\varphi}\dot{\varphi}}{2i} - H(\bar{\varphi}, \varphi) \quad (3.47)$$

und der Impuls zu φ ist $-\bar{\varphi}/2i$, der Impuls zu $\bar{\varphi}$ ist $\varphi/2i$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{\bar{\varphi}}{2i}, \quad \bar{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\varphi}}} = \frac{\varphi}{2i}. \quad (3.48)$$

Wir fassen für normierte Anfangs- und Endzustände $|\varphi\rangle_n$ zusammen

$${}_n \langle \varphi' | e^{-iH(t'-t)} | \varphi \rangle_n = \int [d\bar{\varphi} d\varphi] \exp \left(i \int_t^{t'} d\tau L(\bar{\varphi}, \varphi) \right) = \int [d\bar{\varphi} d\varphi] \exp(iS/\hbar), \quad (3.49)$$

wobei der letzte Ausdruck mit Wirkung S für \hbar “ungleich 1” geschrieben wurde. In beliebigen Raumdimensionen d , also mit Feldern, die einen kontinuierlichen oder diskreten Index r tragen (aus \mathbb{R}^d oder \mathbb{Z}^d) gilt analog

$${}_n \langle \{\varphi'_r\} | e^{-i(t'-t)H(\{\Phi_r^+\}, \{\Phi_r\})} | \{\varphi_r\} \rangle_n = \int \prod_r [d\bar{\varphi}_r d\varphi_r] \exp \left(i \int_t^{t'} d\tau L(\{\bar{\varphi}_r\}, \{\varphi_r\}) \right), \quad (3.50)$$

mit L analog zu (3.47) mit Summation/Integration über den Index r . Die Zustandssumme ist

$$\text{Sp} e^{-\beta H(\{\Phi_r^+\}, \{\Phi_r\})} = \int \prod_r [d\bar{\varphi}_r d\varphi_r] \exp \left(\int_0^\beta d\tau L(\{\bar{\varphi}_r\}, \{\varphi_r\}) \right), \quad (3.51)$$

mit L analog zu (3.47) ohne imaginäre Einheit im Nenner, mit Summation/Integration

über den Index r .

Da in d Dimensionen H ein d -dimensionales Integral über die Hamiltondichte \mathcal{H} ist, ist L dies ebenso

$$H = \int d^d r \mathcal{H}(\Phi^+(r), \Phi(r)), \quad L = \int d^d r \mathcal{L}(\bar{\varphi}(r), \varphi(r)), \quad (3.52)$$

so daß die obigen Pfadintegrale die Form

$$\int [d\bar{\varphi}d\varphi] \exp \left(\int d^{d+1}x \mathcal{L}(\bar{\varphi}(x), \varphi(x)) \right) \quad (3.53)$$

haben.

3.2.2 Fermionische Systeme

Wieder zum Aufwärmen: 0-dimensionales, fermionisches Vielteilchensystem mit Wechselwirkung

$$H = H(\Psi^+, \Psi), \quad \{\Psi, \Psi^+\} = 1 \quad (3.54)$$

$$H \text{ normalgeordnet, d.h. } H = \sum_{n,m} H_{n,m} (\Psi^+)^n \Psi^m, \quad (3.55)$$

das Vakuum sei $|0\rangle$, also $\Psi|0\rangle = 0$ und $\langle 0|0\rangle = 1$. Dies ist wirklich nur eine Vorübung. Mit nur einem Paar von Feldoperatoren ist der zu Grunde liegende Hilbertraum gerade einmal 2-dimensional. Man kann eigentlich nicht von einem Vielteilchensystem sprechen, dazu braucht man tatsächlich d -dimensionale Quantenfelder mit $d \geq 1$.

Wir führen kohärente Zustände ein

$$|\psi\rangle := \exp(\psi \cdot \Psi^+) |0\rangle, \quad (3.56)$$

wobei ψ ein Element einer Graßmannalgebra (GA) ist. M.a.W. wir wollen voraussetzen, daß ψ eine 1-Form ist. Produkte derartiger ψ liefern n -Formen (alternierende multilineare Abbildungen von n Argumenten), also

$$\psi \tilde{\psi} \text{ zu verstehen als } \psi \wedge \tilde{\psi} (= -\tilde{\psi} \wedge \psi) \text{ etc.} \quad (3.57)$$

Demgemäß ist

$$\psi^n = \psi \wedge \psi \wedge \dots \wedge \psi = 1, \psi, 0 \quad \text{für } n = 0, = 1, > 1, \quad (3.58)$$

Damit folgt

$$|\psi\rangle := (1 + \psi\Psi^+) |0\rangle, \quad (3.59)$$

wobei im weiteren ψ und Ψ^+ kommutieren! Wir notieren folgende Eigenschaften

$$(i) \quad (|\psi\rangle)_{\psi \in \text{GA}} \text{ ist vollständig} \quad (3.60)$$

$$(ii) \quad \Psi |\psi\rangle = \psi |\psi\rangle \quad (3.61)$$

$$(iii) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \exp(\bar{\alpha}\beta) \quad (3.62)$$

$$(iv) \quad \text{Darstellung der Eins} \quad 1 = \int d\bar{\psi}d\psi e^{-\bar{\psi}\psi} |\psi\rangle \langle \psi| \quad (3.63)$$

Das Integral ist definiert als

$$\int d\psi 1 = \int d\bar{\psi} 1 = \int d\psi \bar{\psi} = \int d\bar{\psi} \psi = 0 \quad (3.64)$$

$$\int d\psi \psi = \int d\bar{\psi} \bar{\psi} = 1, \quad \text{tatsächlich die Ableitungsregeln.} \quad (3.65)$$

Höherdimensionale Integrale analog.

$$\text{Beweis: (i) klar, mit } 1 \text{ bzw. } \bar{\psi} \text{ multiplizieren und integrieren} \quad (3.66)$$

$$(ii) \quad \Psi(1 + \psi\Psi^+) |0\rangle = \psi |0\rangle = \psi(1 + \psi\Psi^+) |0\rangle \quad (3.67)$$

$$(iii) \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \langle 0 | (1 + \bar{\alpha}\Psi)(1 + \beta\Psi^+) |0\rangle = 1 + \bar{\alpha}\beta = \exp(\bar{\alpha}\beta) \quad (3.68)$$

$$(iv) \quad \langle \alpha | \text{Integralausdruck} | \beta \rangle = \int d\bar{\psi}d\psi \underbrace{e^{-\bar{\psi}\psi} \langle \alpha | \psi \rangle \langle \psi | \beta \rangle}_{(1-\bar{\psi}\psi)(1+\bar{\alpha}\psi)(1+\bar{\psi}\beta)} \\ = \bar{\alpha}\beta - (-1) = \exp(\bar{\alpha}\beta). \quad (3.69)$$

Wir wollen nun die Pfadintegraldarstellung für die Zustandssumme herleiten

$$Z = \text{Sp} e^{-\beta H} = \text{Sp} \left(\int d\bar{\psi}d\psi e^{-\bar{\psi}\psi} |\psi\rangle \langle \psi| e^{-\beta H} \right) \quad (3.70)$$

$$= \int d\bar{\psi}d\psi e^{-\bar{\psi}\psi} \langle \psi | e^{-\beta H} | -\psi \rangle, \quad (3.71)$$

wobei die letzte Identität mit Vorzeichenwechsel aus

$$\langle 0 | \psi \rangle \langle \psi | e^{\dots} | 0 \rangle = \langle \psi | e^{\dots} | 0 \rangle \langle 0 | -\psi \rangle \quad (3.72)$$

$$\langle 1 | \psi \rangle \langle \psi | e^{\dots} | 1 \rangle = \langle \psi | e^{\dots} | 1 \rangle \langle 1 | -\psi \rangle \quad (3.73)$$

(evtl. plus lineare Terme in ψ , die im Integral verschwinden)

folgt und diese Beziehungen aus $\psi\bar{\psi} = -\bar{\psi}\psi$ folgen.

Wir sehen also zunächst, daß wir in imaginärer Zeitrichtung antiperiodische Randbedingungen haben. Dann erhalten wir ähnlich zum bosonischen Fall

$$Z = \int [d\bar{\psi}d\psi] \exp \left(- \int_0^\beta d\tau (\bar{\psi}\dot{\psi} + H(\bar{\psi}, \psi)) \right). \quad (3.74)$$

3.3 Ein-Teilchen-Greens-Funktionen und Wick'sches Theorem

Wir betrachten freie Teilchen, d.h. Hamiltonoperatoren mit bilinear auftretenden Feldoperatoren. Natürlich behandeln wir zunächst den bosonischen Fall. Gleichgültig, ob wir ein diskretes System oder ein kontinuierliches System vorliegen haben, nutzen wir eine diskrete bzw. diskretisierte Pfadintegraldarstellung

$$\text{Raum-Zeit-Punkt } (\vec{r}, \tau) =: x, \quad (3.75)$$

wobei \vec{r} und τ (und somit x) aus diskreten Mengen stammen. Wir betrachten das erzeugende Funktional

$$Z(\epsilon, \bar{\epsilon}) = \int \left(\prod_x \frac{d\bar{\varphi}_x d\varphi_x}{2\pi i} \right) \exp \left(- \sum_{x,y} \bar{\varphi}_x K_{x,y} \varphi_y + \sum_x (\epsilon_x \varphi_x + \bar{\epsilon}_x \bar{\varphi}_x) \right), \quad (3.76)$$

wobei x, y diskrete Raum-Zeit-Punkte sind, $K_{x,y}$ die Matrixelemente der diskreten Lagrange-Funktion und $\epsilon, \bar{\epsilon}$ unabhängige Variable, deren Werte in der Nähe von 0 liegen. Für $\epsilon = \bar{\epsilon} = 0$ wird durch das Integral die gewünschte Zustandssumme reproduziert. Durch geeignetes Ableiten nach $\epsilon, \bar{\epsilon}$ und dann Setzen von $\epsilon = \bar{\epsilon} = 0$ erhalten wir die Korrelationsfunktionen. Wir sehen beispielsweise

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_x \partial \bar{\epsilon}_y} Z \right|_{\epsilon=\bar{\epsilon}=0} = \langle \varphi_x \bar{\varphi}_y \rangle_{\text{klassische Theorie}} = \langle \bar{\varphi}_y \varphi_x \rangle_{\text{klassische Theorie}} \quad (3.77)$$

$$= \begin{cases} \langle \Phi_x \Phi_y^+ \rangle_{\text{Quanten-Theorie}}, & \text{für } x_0 > y_0, \\ \langle \Phi_y^+ \Phi_x \rangle_{\text{Quanten-Theorie}}, & \text{für } y_0 > x_0, \end{cases} \quad (3.78)$$

$$= \langle \mathcal{T} [\Phi_x \Phi_y^+] \rangle \quad (3.79)$$

wobei \mathcal{T} das Zeitordnungssymbol ist. Wir wollen nun $Z(\epsilon, \bar{\epsilon})$ berechnen und starten mit einer quadratischen Ergänzung

$$Z(\epsilon, \bar{\epsilon}) = \underbrace{\int \prod_x \frac{d\bar{\varphi}_x d\varphi_x}{2\pi i} \exp \left(- (\bar{\varphi}^T - \epsilon^T K^{-1}) K (\varphi - K^{-1} \bar{\epsilon}) + \epsilon^T K^{-1} \bar{\epsilon} \right)}_{\text{Gauss-Integral, Ergebnis unabhängig von } \epsilon, \bar{\epsilon}} \quad (3.80)$$

$$= \frac{1}{\det K} \cdot \exp(\epsilon^T K^{-1} \bar{\epsilon}) = \frac{1}{\det K} \cdot \exp \left(\sum_{x,y} \epsilon_x K_{x,y}^{-1} \bar{\epsilon}_y \right) \quad (3.81)$$

wobei K die Matrix mit Matrixelementen $K_{x,y}$ ist. Die Korrelationsfunktion bzw. die obige Ableitung ist daher

$$\dots = K_{x,y}^{-1} \quad (3.82)$$

Nun betrachten wir den fermionischen Fall. Wir benutzen das erzeugende Funktional

$$Z(\epsilon, \bar{\epsilon}) = \int \prod_x d\bar{\psi}_x d\psi_x \exp \left(- \sum_{x,y} \bar{\psi}_x K_{x,y} \psi_y + \sum_x (\epsilon_x \psi_x + \bar{\epsilon}_x \bar{\psi}_x) \right) \quad (3.83)$$

$$= \int \prod_x d\bar{\psi}_x d\psi_x \exp \left(- (\bar{\psi}^T - \epsilon^T K^{-1}) K (\psi + K^{-1} \bar{\epsilon}) - \epsilon^T K^{-1} \bar{\epsilon} \right) \quad (3.84)$$

$$= \det K \cdot \exp \left(- \epsilon^T K^{-1} \bar{\epsilon} \right) = \det K \cdot \exp \left(- \sum_{x,y} \epsilon_x K_{x,y}^{-1} \bar{\epsilon}_y \right) \quad (3.85)$$

$$= \det K \cdot \exp \left(\sum_{x,y} \bar{\epsilon}_y K_{x,y}^{-1} \epsilon_x \right) \quad (3.86)$$

wobei das ‘‘Gaußintegral’’ hier auf Grund der Graßmann-Regeln das ‘‘Inverse’’ des bosonischen Ergebnisses ist.

Wir erhalten

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_x \partial \bar{\epsilon}_y} Z \right|_{\epsilon=\bar{\epsilon}=0} = K_{x,y}^{-1} = \langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle_{\text{klassische Theorie}} = - \langle \bar{\psi}_y \psi_x \rangle_{\text{klassische Theorie}} \quad (3.87)$$

$$= \begin{cases} \langle \Psi_x \Psi_y^+ \rangle_{\text{Quanten-Theorie}}, & \text{für } x_0 > y_0, \\ - \langle \Psi_y^+ \Psi_x \rangle_{\text{Quanten-Theorie}}, & \text{für } y_0 > x_0, \end{cases} \quad (3.88)$$

$$= \langle \mathcal{T} [\Psi_x \Psi_y^+] \rangle \quad (3.89)$$

wobei \mathcal{T} das Zeitordnungssymbol ist.

Diese Ergebnisse sind kompakt, aber etwas formal: Zum Hamiltonoperator H ist zuerst in einer geeigneten Diskretisierung der (imaginären) Zeit und evtl. des Raumes

die Kopplungsmatrix K zu bestimmen und dann das Inverse sowie der Kontinuums-
limes in der Zeit und evtl. des Raumes. Dies ist für translationsinvariante Systeme
in der Impuls-Frequenz-Darstellung leicht anzugeben (und in abgewandelter Form für
beliebige vollständige Systeme von Eigenfunktionen)

$$\bar{\varphi}^T K \varphi = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3r [\bar{\varphi}(r, \tau) \dot{\varphi}(r, \tau) + \mathcal{H}(\bar{\varphi}(r, \tau), \varphi(r, \tau))] = \sum_{p,z} (\epsilon_p - z) \bar{\varphi}_{p,z} \varphi_{p,z}, \quad (3.90)$$

wobei p alle Impulse kompatibel mit dem endlichen Volumen V , z alle $2n\pi i/\beta$ (boso-
nischer Fall) bzw. $(2n+1)\pi i/\beta$ (fermionischer Fall) mit $n \in \mathbb{Z}$ durchlaufen und ϵ_p die
Einteilchenenergie zum Impuls p ist. Die Felder transformieren sich ineinander nach

$$\varphi(r, \tau) = \frac{1}{\sqrt{V\beta}} \sum_{p,z} e^{ipr - z\tau} \varphi_{p,z} \quad (3.91)$$

$$\varphi_{p,z} = \frac{1}{\sqrt{V\beta}} \int_0^\beta d\tau \int_V d^3r e^{-ipr + z\tau} \varphi(r, \tau). \quad (3.92)$$

Es folgt sofort

$$\bar{\varphi}^T K^{-1} \varphi = \sum_{p,z} \frac{1}{\epsilon_p - z} \bar{\varphi}_{p,z} \varphi_{p,z} \quad (3.93)$$

$$= \sum_{p,z} \frac{1}{\epsilon_p - z} \frac{1}{V\beta} \int d\tau d\tau' d^3r d^3r' e^{ip(r'-r) - z(\tau' - \tau)} \bar{\varphi}_{r', \tau'} \varphi_{r, \tau} \quad (3.94)$$

$$= \int d\tau d\tau' d^3r d^3r' \left(\frac{1}{V\beta} \sum_{p,z} \frac{1}{\epsilon_p - z} e^{ip(r'-r) - z(\tau' - \tau)} \right) \bar{\varphi}_{r', \tau'} \varphi_{r, \tau} \quad (3.95)$$

3.3.1 Wicksches Theorem

Wir wollen nun den zweiten Beweis kennenlernen. Dies ist ein auf dem Funktionalin-
tegral und der erzeugenden Funktion basierender Beweis bzw. eine konstruktive Vor-
schrift. Wir fassen den bosonischen und den fermionischen Fall zusammen und benutzen
für die Felder das Symbol φ . Wir leiten für n verschiedene Punkte $x_j = (r_j, \tau_j)$ nach
 ϵ_{x_j} bzw. $\bar{\epsilon}_{x_j}$ ab

$$\left(\prod_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \epsilon_{x_j}^{(-)}} Z(\epsilon, \bar{\epsilon}) \right) / Z(0, 0) = \left\langle \prod_{j=1}^n \varphi_{x_j}^{(-)} \right\rangle = \left\langle \mathcal{T} \left[\prod_{j=1}^n \Phi_{x_j}^{(+)} \right] \right\rangle, \quad (3.96)$$

wobei jetzt verwirrender Weise zu $\overset{(-)}{\varphi}$ der Operator $\Phi^{(+)}$ korrespondiert, also zu φ ($\bar{\varphi}$) korrespondiert Φ (Φ^+). Im fermionischen Fall ist auch noch die Reihung der Ableitungen und des Produkts der Graßmann-Variablen sowie des Produkts der Operatoren zu fixieren. Wir sehen, daß die n -Punkt-Green-Funktionen generiert werden. Andererseits kennen wir $Z(\epsilon, \bar{\epsilon})$ “explizit” und können die Ableitungen explizit berechnen

$$l.S. = \left(\prod_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \overset{(-)}{\epsilon}_{x_j}} \exp(\bar{\epsilon}^T K^{-1} \epsilon) \right) \Big|_{\epsilon=\bar{\epsilon}=0}, \quad (3.97)$$

was übrigens 0 ist, wenn die Anzahl der ϵ -Ableitungen ungleich der Anzahl der $\bar{\epsilon}$ -Ableitungen ist, da zum Schluß $\epsilon = \bar{\epsilon} = 0$ gesetzt wird.

Wir wollen nun explizit für $n = 4$ rechnen

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_{x_4}} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{x_3}} \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_{x_2}} \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_{x_1}} \exp(\bar{\epsilon}^T K^{-1} \epsilon) \quad (3.98)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \epsilon_{x_4}} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{x_3}} (K^{-1} \epsilon)_{x_2} (K^{-1} \epsilon)_{x_1} \exp(\bar{\epsilon}^T K^{-1} \epsilon) \quad (3.99)$$

$$= (K^{-1})_{x_2 x_3} (K^{-1})_{x_1 x_4} \pm (K^{-1})_{x_2 x_4} (K^{-1})_{x_1 x_3}. \quad (3.100)$$

Wir erhalten

$$\langle \varphi_{x_4} \varphi_{x_3} \bar{\varphi}_{x_2} \bar{\varphi}_{x_1} \rangle = \langle \varphi_{x_3} \bar{\varphi}_{x_2} \rangle \langle \varphi_{x_4} \bar{\varphi}_{x_1} \rangle \pm \langle \varphi_{x_4} \bar{\varphi}_{x_2} \rangle \langle \varphi_{x_3} \bar{\varphi}_{x_1} \rangle \quad (3.101)$$

bzw.

$$\langle \mathcal{T}[\Phi_{x_4} \Phi_{x_3} \Phi_{x_2}^+ \Phi_{x_1}^+] \rangle = \langle \mathcal{T}[\Phi_{x_3} \Phi_{x_2}^+] \rangle \langle \mathcal{T}[\Phi_{x_4} \Phi_{x_1}^+] \rangle \pm \langle \mathcal{T}[\Phi_{x_4} \Phi_{x_2}^+] \rangle \langle \mathcal{T}[\Phi_{x_3} \Phi_{x_1}^+] \rangle \quad (3.102)$$

4 Lie-Gruppen und -Algebren

Wir werden uns nun mit speziellen unendlichen Gruppen beschäftigen. Unter einer (n -dimensionalen) Lie-Gruppe G verstehen wir eine (reelle) n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die zugleich Gruppe ist derart, daß

$$G \times G \rightarrow G \quad (4.1a)$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b, \quad (4.1b)$$

differenzierbar ist.

Beispiele von Lie-Gruppen sind wohlbekannt, so die “klassischen Gruppen” $SU(N)$,

$\text{SO}(N)$, $\text{Sp}(2N)$.

$\text{SU}(N)$: spezielle ($\det M = +1$) unitäre $N \times N$ Matrizen ($M \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$), Invarianz des unitären Produktes $\bar{x}^T \cdot y$

$$\bar{M}^T \cdot M = \mathbb{1}_N \quad (4.2)$$

$\text{SO}(N)$: spezielle ($\det M = +1$) orthogonale Matrizen ($M \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$), Invarianz von $x^T \cdot y$

$$M^T \cdot M = \mathbb{1}_N \quad (4.3)$$

$\text{Sp}(2N)$: spezielle ($\det M = +1$) symplektische Matrizen ($M \in \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{R})$), Invarianz der symplektischen Form $x^T \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_N \\ \mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix} y$

$$M^T \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_N \\ \mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_N \\ \mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Insbesondere ist in diesen Fällen die Gruppeneigenschaft erfüllt: Verkettung, Eins, Inverse liegen in der Menge.

Obwohl Lie-Gruppen nicht-endliche Gruppen sind, kann man über ihre Strukturen und Darstellungen detailliert Kenntnis erlangen, da sie endlichdimensionale Mannigfaltigkeiten sind. Mit anderen Worten: Lie-Gruppen besitzen nur endlich viele (nämlich n) Erzeuger. Darunter versteht man in der Physik Gruppenelemente, die nahe beim Einselement liegen (bzw. die Differenz).

In der Mathematik führt man den Tangentialraum $\mathfrak{g} := T_e G$ von G bei e ein. Der Raum \mathfrak{g} ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Auch für abstrakt definierte Lie-Gruppen existiert die sogenannte Exponentialabbildung

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (4.5a)$$

$$a \mapsto \exp(a), \quad (4.5b)$$

so daß jedes Element von G in der Zusammenhangskomponente von e erfaßt wird und die “üblichen Rechenregeln” gelten. Ferner ist auf \mathfrak{g} ein sogenanntes Lie-Klammerprodukt

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (4.6a)$$

$$(a, b) \mapsto [a, b], \quad (4.6b)$$

definiert, welches bilinear ist sowie

$$[a, b] = -[b, a] \quad (\text{Anti-Symmetrie}) \quad (4.7)$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität}) \quad (4.8)$$

erfüllt. Insbesondere ist die (reelle) Lie-Algebra $(\mathfrak{g}, [., .])$ nicht assoziativ.

Man kann die Existenz eines derartigen Produktes am einfachsten begreifen, wenn man zu geeigneten ‘‘definierenden Darstellungen’’ übergeht, also G in einen geeigneten Matrizenraum einbettet, d.h. $a \rightarrow X_a$ (liefert für n ausgezeichnete Elemente eine Basis X_1, \dots, X_n) oder auch $a \rightarrow iX_a$ mit hermitischem X_a im Falle unitärer Darstellungen (wie sie z.B. immer für kompakte G existieren).

Es gilt

$$\exp(i\lambda X_b) \exp(i\lambda X_a) \exp(-i\lambda X_b) \exp(-i\lambda X_a) \in G \quad (4.9)$$

$$= 1 + \lambda^2(X_a X_b - X_b X_a) + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (4.10)$$

was als Funktion von $t := \lambda^2$ eine differenzierbare Abbildung durch die Eins e ist bei $t = 0$ und als Ableitung nach t bei 0 ein Element des Tangentialraums $T_e G$ liefert, so daß das Objekt in Klammern ein Element von \mathfrak{g} sein muß

$$[X_a, X_b] := X_a X_b - X_b X_a = i \sum_c f_{abc} X_c, \quad (\text{Summation über } c = 1, \dots, n) \quad (4.11)$$

mit sogenannten Strukturkonstanten f_{abc} , die abhängig sind von der Basis und i.a. nur antisymmetrisch sind in a und b . Durch die Definition des Klammerproduktes wie gerade geschehen ist dieses natürlich anti-symmetrisch und erfüllt die Jacobi-Identität. Mit dem ‘‘Faktor i ’’ werden häufig die (Darstellungen) der Elemente der Lie-Algebra hermitisch, so daß diese Strukturfaktoren reell sind.

Beispiel: Die Lie-Algebren der ‘‘klassischen Gruppen’’ (=Tangentialraum ‘‘mal i ’)

su(N): spurlose hermitische $N \times N$ Matrizen, Dimension ist $N^2 - 1$. Im Folgenden entwickeln wir $\exp(i\lambda X) = 1 + i\lambda X + \mathcal{O}(\lambda^2)$, λ gelte als klein

$$- \bar{X}^T + X = 0, \quad \det(\mathbb{1}_N + i\lambda X + \mathcal{O}(\lambda^2)) = 1 + i\lambda \text{Sp} X + \mathcal{O}(\lambda^2) = 1. \quad (4.12)$$

so(N): spurlose (imaginäre) antisymmetrische $N \times N$ Matrizen, Dimension ist $N(N -$

1)/2

$$X^T + X = 0, \quad \det(\mathbb{1}_N + i\lambda X) = 1 + i\text{Sp}X + \mathcal{O}(\lambda^2) = 1. \quad (4.13)$$

sp(2N): spurlose (imaginäre) $2N \times 2N$ Matrizen der Form $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} X_1^T & X_3^T \\ X_2^T & X_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_N \\ \mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_N \\ \mathbb{1}_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_3^T & -X_1^T \\ X_4^T & -X_2^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X_3 & -X_4 \\ X_1 & X_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

$$\Leftrightarrow X_1 = -X_4^T, \quad X_2 = X_2^T, \quad X_3 = X_3^T, \quad (4.16)$$

mit Dimension $N^2 + 2\frac{N(N+1)}{2} = 2N^2 + N$.

Das Studium der Liegruppe ist gleichwertig zur Untersuchung der Liealgebra, da die Multiplikationsgesetze durch die Strukturkonstanten bestimmt sind:

$$\exp(i\alpha_a X_a) \exp(i\beta_b X_b) \equiv \exp(i\gamma_c X_c) \quad (4.17)$$

wobei γ_c wie folgt durch α_a, β_b gegeben ist

$$\gamma_c = \alpha_c + \beta_c - \frac{1}{2} \sum_{a,b} f_{abc} \alpha_a \beta_b + \dots (\text{Terme höherer Ordnung in } \alpha, \beta). \quad (4.18)$$

Insbesondere liefert jede Darstellung einer Gruppe eine Darstellung der Algebra und umgekehrt. (Zumindest für die Zusammenhangskomponente des Einselements. Ausnahmen: Darstellungen der Algebra, die zu "mehrdeutigen" Darstellungen der Gruppe führen; Spindarstellungen.)

Wir erinnern an einige Begriffe der Algebra:

Eine invariante Untergruppe N von G heißt Normalteiler (für alle $g \in G$ gilt $gNg^{-1} = N$),

und entspricht einer

invarianten Unteralgebra I von \mathfrak{g} , die Ideal heißt (für alle $x \in I, y \in \mathfrak{g}$ gilt $[x, y] \in I$).

Wir werden uns auf halbeinfache Lie-Gruppen (-Algebren) beschränken, d.h. solche die keine abelschen invarianten Unteralgebren besitzen. Tatsächlich werden wir

uns häufig auf einfache Lie-Algebren zurückziehen, d.h. solche die keine nicht-trivialen invarianten Unteralgebren besitzen.

Von größter Bedeutung zur Untersuchung einer Lie-Algebra ist die sogenannte adjungierte (= reguläre) Darstellung. Als zu Grunde liegenden Vektorraum wählen wir \mathfrak{g} selbst (n -dimensional). Die Darstellung eines Elementes $a \in \mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit $ad(a)$, was eine Abbildung von \mathfrak{g} in \mathfrak{g} ist (bzw. eine $N \times N$ Matrix)

$$ad(a) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (4.19a)$$

$$b \mapsto [a, b] =: ad(a) \cdot b, \quad (4.19b)$$

Dies ist eine Darstellung, da

$$ad([a, b]) = [ad(a), ad(b)] \quad (4.20)$$

ist, wobei die erste Klammer die Lie-Klammer der abstrakten Algebra ist, die zweite Klammer ist der Kommutator für die beiden Abbildungen $ad(a)$, $ad(b)$. Wir zeigen die Gleichheit durch Anwenden auf ein beliebiges $c \in \mathfrak{g}$

$$ad([a, b])c = [[a, b], c] \quad (4.21)$$

$$[ad(a), ad(b)]c = (ad(a) \cdot ad(b) - ad(b) \cdot ad(a))c = [a, [b, c]] - [b, [a, c]] \quad (4.22)$$

wobei die beiden rechten Seiten wegen der Jacobi-Identität $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ gleich sind.

Unter der Killing-Form versteht man die symmetrische bilineare Form

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.23a)$$

$$(a, b) \mapsto \text{Sp}(ad(a)ad(b)), \quad (4.23b)$$

wobei die Spur in der adjungierten (n -dimensionalen) Darstellung zu nehmen ist. Durchlaufen a, b Basisvektoren $\{a_1, \dots, a_n\}$ so stellt $M := \text{Sp}(ad(a_j), ad(a_k))_{j,k}$ eine reelle symmetrische Matrix dar, die diagonalisiert werden kann. Sei dies schon geschehen, also die $\{a_1, \dots, a_n\}$ entsprechend gewählt, so befindet sich M in der Form

$$\text{Sp}(ad(a_j)ad(a_k)) = \kappa_j \cdot \delta_{j,k}, \quad (\text{keine Summation über } j). \quad (4.24)$$

Man hat als Kriterium (Cartan) für Halbeinfachheit der Lie-Algebra $\kappa_j \neq 0$ für alle j , d.h. die Killingform ist nichtentartet. Für kompakte halbeinfache Gruppen gilt ferner $\kappa_j > 0$.

Wir wollen eine entsprechende Normierung der Basiselemente vornehmen, so daß

$$\mathrm{Sp}(ad(a_j)ad(a_k)) = \kappa \cdot \delta_{j,k}. \quad (4.25)$$

Für diese Basiselemente a_j haben die Strukturkonstanten f_{jkl} eine besondere Eigenschaft. Aus

$$[ad(a_j), ad(a_k)] := i \sum_m f_{jkm} ad(a_m), \quad (4.26)$$

folgt

$$\mathrm{Sp}\left([ad(a_j), ad(a_k)]ad(a_l)\right) = i \sum_m f_{jkm} \mathrm{Sp}(ad(a_m)ad(a_l)) = i\kappa f_{jkl}, \quad (4.27)$$

wobei die linke Seite, und damit die rechte Seite, vollständig antisymmetrisch in allen Indizes j, k, l ist wegen

$$\mathrm{Sp}\left([A, B]C\right) = \mathrm{Sp}\left(ABC - BAC\right) = \mathrm{Sp}\left(BCA - CBA\right) = \mathrm{Sp}\left([B, C]A\right). \quad (4.28)$$

Bemerkung: (i) Die Strukturkoeffizienten sind die Matricelemente der adjungierten Darstellung. Genauer: $ad(a_j)$ hat das (l, k) -Matricelement if_{jkl} , denn $ad(a_j)a_k = i \sum_l f_{jkl}a_l$. Ist die Basis so gewählt, daß die Killingform diagonal ist, so sind die Matricelemente jedes $ad(a_j)$ antisymmetrisch, sowie rein imaginär, also hermitisch.

(ii) Das Cartansche Kriterium für Halbeinfachheit bedarf eines Beweises. Eine kleine "Illustration" oder Plausibilitätsbetrachtung ist: $B_{jk} = -\sum_{l,m} f_{jlm}f_{kml}$. Wenn wir nun schon wüßten, daß die Strukturkonstanten in den letzten beiden Indizes antisymmetrisch sind, so hätten wir $B_{jk} = \sum_{l,m} f_{jlm}f_{klm}$ und $B_{jj} = 0$ würde $f_{jtm} = 0$ für alle l, m nach sich ziehen, also a_j "kommutiert" mit allem.

4.1 Wurzeln und Gewichte

Wir untersuchen weiter einfache Lie-Algebren und zielen ab auf die Charakterisierung aller denkbaren irreduziblen Darstellungen.

Wir zeichnen eine maximale kommutative Unteralgebra, die sog. Cartansche Unteralgebra aus, deren Elemente paarweise Lieklammer null liefern: $[h, \tilde{h}] = 0$. Diese Unteralgebra sei r -dimensional, wobei sicher $1 \leq r < n$ gilt. Wir wählen als Basiselemente h_1, \dots, h_r und komplettieren dies mit Elementen $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{n-r}$ zu einer Basis von ganz \mathfrak{g} , derart, daß diese Basis orthonormiert bzgl der Killing-Form ist. (Diese Konstruktion ist immer möglich durch rekursives Orthonormieren von Linearkombinationen bzgl. der Killing-Form).

Die Dimension r der Cartanschen Unteralgebra heißt auch der Rang der Liealgebra.

Die Wahl der Cartan-Unteralgebra ist nicht eindeutig, aber die Schlüsse, die gezogen werden, sind davon unabhängig. Eine gewisse Sorge betrifft womöglich die Frage nach der Maximalität. Diese wird jedoch im weiteren mit beantwortet, d.h. ein vergessenes Element wird zwangsläufig aufgefunden.

Wir wollen eine übliche Notation der Physik benutzen. Elemente x_j des Vektorraums \mathfrak{g} wollen wir mit $|x_j\rangle$ (oder ähnlich) bezeichnen, insbesondere, wenn die adjungierte Darstellung $ad(a_k)$ irgendeines Elementes a_k der Lie-Algebra darauf wirkt, welches auch als A_k geschrieben wird:

$$ad(a_k) \cdot x_j \equiv A_k |x_j\rangle \quad (= [a_k, x_j] = |[a_k, x_j]\rangle). \quad (4.29)$$

Das Verschwinden der Lie-Klammer unter allen h_j kann nun so geschrieben werden

$$H_i |h_k\rangle = 0, \quad \text{für alle } j, k. \quad (4.30)$$

Da alle H_j bzgl. der Killingform, die als Skalarprodukt gewählt wird, hermitisch sind (imaginär antisymmetrisch), können diese simultan diagonalisiert werden. (Oder: bei Benutzung einer orthonormierten Basis wie oben sind die darstellenden Matrizen imaginär antisymmetrisch.) Dadurch erhalten wir Zustände $|e_\alpha\rangle$ mit einem reellen (!) m -Tupel α , derart daß

$$H_j |e_\alpha\rangle = \alpha_j |e_\alpha\rangle \quad (4.31)$$

was für die Liealgebra-Elemente heißt

$$[h_j, e_\alpha] = \alpha_j e_\alpha, \quad (4.32)$$

wobei die Klammer die Lie-Klammer ist. In jeder (insbes. der adjungierten) Darstellung erhalten wir wortgleich

$$[H_j, E_\alpha] = \alpha_j E_\alpha, \quad (4.33)$$

wenn unter der Klammer der Kommutator verstanden wird. Die Identität kann also auf drei Weisen verstanden werden.

Keines der Tupel α enthält ausschließlich Nullen. Falls doch, nimmt man das zugehörige E_α als weiteres Element der Cartan-Unteralgebra auf und startet die Prozedur erneut.

Beispiel: $\mathfrak{su}(3)$

Wir wollen vorab bemerken, daß für die allgemeine $\mathfrak{su}(N)$ gilt $B(x, y) = 2N \operatorname{Sp}(XY)$,

wobei in der Spur X, Y in der definierenden Darstellung sind. Für $\mathfrak{su}(3)$ ist dies $B(x, y) = 6 \operatorname{Sp}(XY)$. Die Form der allgemeinen Relation ist intuitiv, findet man aber nur (?) über eine direkte Rechnung. Den Fall $N = 3$ untersuchen wir.

Wir wählen die 8 spurfreien hermiteschen 3×3 -Matrizen nach Gell-Mann (in unserer üblichen Notation eigentlich mit Großbuchstaben zu schreiben)

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & \\ i & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} & -i & \\ 0 & & \\ i & & \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & -i & \\ i & 0 & \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Es gilt

$$\operatorname{Sp}(\lambda_j \lambda_k) = 2\delta_{j,k} \quad (4.38)$$

Diese Matrizen sind nicht (alle) rein-imaginär und antisymmetrisch, aber die der adjungierten Darstellung, wie wir gleich im Falle von λ_3 und λ_8 sehen werden. Diese beiden Matrizen kommutieren, es gibt keine weitere Matrix, die mit diesen beiden vertauscht. Das Lie-Klammerprodukt der abstrakten Elemente ist über den Kommutator der darstellenden 3×3 -Matrizen gegeben. Als Basis der Cartanschen Unter algebra können wir λ_3 und λ_8 nehmen. Der Rang der $\mathfrak{su}(3)$ ist damit 2. (Allgemeiner: der Rang der $\mathfrak{su}(N)$ ist $N - 1$.)

Wir rechnen zunächst die Kommutatoren von λ_3 und λ_8 mit den verbleibenden Basiselementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ explizit mit den 3×3 -Matrizen und schreiben das

Ergebnis unter Benutzung der λ_j

$$\begin{aligned}
[\lambda_3, \lambda_1] &= 2i\lambda_2 & [\lambda_8, \lambda_1] &= 0 \\
[\lambda_3, \lambda_2] &= -2i\lambda_1 & [\lambda_8, \lambda_2] &= 0 \\
[\lambda_3, \lambda_4] &= i\lambda_5 & [\lambda_8, \lambda_4] &= i\sqrt{3}\lambda_5 \\
[\lambda_3, \lambda_5] &= -i\lambda_4 & [\lambda_8, \lambda_5] &= -i\sqrt{3}\lambda_4 \\
[\lambda_3, \lambda_6] &= -i\lambda_7 & [\lambda_8, \lambda_6] &= i\sqrt{3}\lambda_7 \\
[\lambda_3, \lambda_7] &= i\lambda_6 & [\lambda_8, \lambda_7] &= -i\sqrt{3}\lambda_6
\end{aligned}$$

Bemerkung: Auf der rechten Seite treten keine Elemente aus der Cartanschen Unter- algebra auf. Dies liegt an der totalen Antisymmetrie der Strukturkonstanten etc. In Matrixform bzgl. der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ geschrieben

$$ad(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2i & & & & & & \\ 2i & 0 & & & & & & \\ & & 0 & -i & & & & \\ & & i & 0 & & & & \\ & & & & 0 & i & & \\ & & & & -i & 0 & & \end{pmatrix} \quad ad(\lambda_8) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & & -i\sqrt{3} & & & & \\ & & i\sqrt{3} & & & & & \\ & & & & & & & -i\sqrt{3} \\ & & & & & & i\sqrt{3} & \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Wir überprüfen hier exemplarisch für $j, k = 3, 8$ leicht, daß

$$\text{Sp}(ad(\lambda_j)ad(\lambda_k)) = \kappa\delta_{j,k} \quad \text{mit} \quad \kappa = 12 \quad (4.40)$$

Die simultanen Eigenzustände von $ad(\lambda_3)$ und $ad(\lambda_8)$ sind

$$\begin{aligned}
[\lambda_3, \lambda_1 \pm i\lambda_2] &= \pm 2(\lambda_1 \pm i\lambda_2) & [\lambda_8, \lambda_1 \pm i\lambda_2] &= 0 \\
[\lambda_3, \lambda_4 \pm i\lambda_5] &= \pm(\lambda_4 \pm i\lambda_5) & [\lambda_8, \lambda_4 \pm i\lambda_5] &= \pm\sqrt{3}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \\
[\lambda_3, \lambda_6 \pm i\lambda_7] &= \mp(\lambda_6 \pm i\lambda_7) & [\lambda_8, \lambda_6 \pm i\lambda_7] &= \pm\sqrt{3}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)
\end{aligned}$$

Wir sehen, daß der Rang von $\text{su}(3)$ tatsächlich 2 ist, da es kein weiteres Element gibt, das mit beiden λ_3 und λ_8 kommutiert.

Wir wollen den Darstellungsraum \mathfrak{g} der adjungierten Darstellung mit einem Skalarprodukt versehen. \mathfrak{g} ist ein reeller Vektorraum, doch führt uns die Diagonalisierung der H_j im allgemeinen zu einer Komplexifizierung. Das durch die Killingform gegebene

Skalarprodukt auf $(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ ist als

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{\kappa} \operatorname{Sp}(ad(x)ad(y)) \quad (4.41)$$

gewählt, so daß die a_j wie in (4.25) auf 1 normiert sind. Tatsächlich ist der Faktor κ ein freier (reeller) Parameter (> 0), der in der mathematischen Literatur häufig $\kappa = 1$ gesetzt wird. Wir wollen diesen Parameter nach Bequemlichkeit setzen. Das Skalarprodukt wird auf die komplexifizierte Liealgebra $(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ wie folgt ausgedehnt

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{\kappa} \operatorname{Sp}\left(ad(x)^+ ad(y)\right), \quad (4.42)$$

$$x = \sum_j \mu_j x_j \quad \Rightarrow \quad ad(x) := \sum_j \mu_j ad(x_j), \quad ad(x)^+ = \sum_j \bar{\mu}_j ad(x_j) \quad (4.43)$$

wobei μ_j komplexe Zahlen, die x_j eine Standardbasis von $(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, also imaginäre, antisymmetrische Matrizen sind, so daß $ad(x_j)^+ = ad(x_j)$. Tatsächlich gilt auch für die definierende Darstellung der $su(N)$, daß die auftretenden Matrizen imaginär, antisymmetrisch oder reell, symmetrisch, und daher immer hermitisch sind, so daß auch hier $X_j^+ = X_j$ gilt und

$$X = \sum_j \mu_j X_j \quad \Rightarrow \quad X^+ = \sum_j \bar{\mu}_j X_j \quad \text{und} \quad ad(x^+) = ad(x)^+ \quad (4.44)$$

Welcher Wert auch für κ gewählt wird, wollen wir voraussetzen, daß die Basis h_j der Cartanschen Unteralgebra und die Erzeuger e_α bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ortho-) normiert seien.

$$\langle h_j, h_k \rangle = \delta_{j,k} \quad (4.45)$$

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \langle h_j, e_\alpha \rangle = 0 \quad (4.46)$$

Aus $[h_j, e_\alpha] = \alpha_j e_\alpha$ folgt

$$[h_j, e_\alpha^+] = -\alpha_j e_\alpha^+ \quad \Rightarrow \quad e_\alpha^+ = e_{-\alpha} \quad (4.47)$$

wobei wir bei der Identifizierung vorausgesetzt haben, daß der Eigenraum zu α nicht-entartet ist. (Zum Beweis: siehe weiter unten.)

Die Eigenwerte von H_j in einer beliebigen Darstellung heißen Gewichte dieser Darstellung. Die Gewichte α der adjungierten Darstellung haben eine besondere Bedeutung und heißen Wurzeln. (In der Mathematik werden Wurzeln als duale Vektoren zu der Cartanschen Unteralgebra eingeführt und sind somit unabhängig von der in diesem Raum gewählten Basis.)

Beispiel: $\mathfrak{su}(3)$. Hier hatten wir eine "Standardbasis" gewählt, so daß in (4.40) $\kappa = 12$ ist. Wir gehen zu einer Basis über, in der dieses $\kappa = 3$ ist, d.h.

$$h_1 = \lambda_3/2, \quad h_2 = \lambda_8/2 \quad (4.48)$$

mit Wurzeln

$$\begin{aligned} (\pm 1, 0), \quad e_{(\pm 1, 0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \\ \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad e_{\dots} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \\ \left(\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad e_{\dots} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \end{aligned}$$

wobei die h_j und e_α normiert sind.

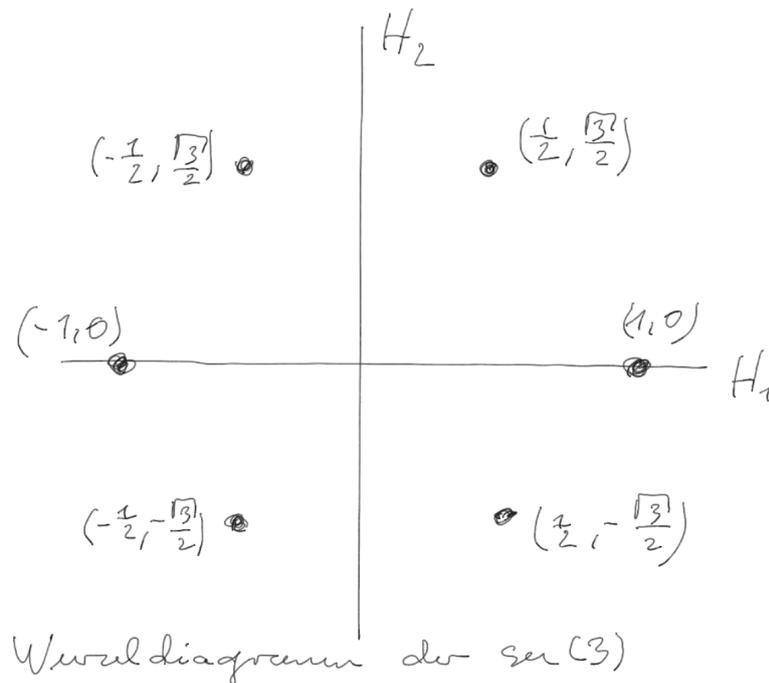


Abbildung 4.1: Die Wurzeln formen ein reguläres Hexagon. Für andere Lie-Algebren ergeben sich ebenfalls "besondere Winkel" zwischen den Wurzeln: siehe später.

4.1.1 Darstellungen und Gewichte

Wir nehmen nun an, daß eine beliebige (irreduzible) Darstellung der Lie-Algebra durch lineare Abbildungen eines endlichdimensionalen Vektorraums V in sich gegeben sei

$$D : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}(V) \quad (4.49a)$$

$$a \mapsto D(a), \quad (4.49b)$$

so daß D strukturerhaltend ist

$$D([a, b]) = [D(a), D(b)], \quad (4.50)$$

wobei die erste eckige Klammer die Lie-Klammer in der Lie-Algebra ist, die zweite eckige Klammer ist der Kommutator der Abbildungen. Eine Abbildung D dieser Art heißt “Darstellung von \mathfrak{g} in V ”.

Die Darstellungen der Basis h_1, \dots, h_r der Cartanschen Untereralgebra in V werden wieder mit H_1, \dots, H_r bezeichnet

$$H_1 = D(h_1), \dots, H_r = D(h_r), \quad (4.51)$$

so wie im Falle der adjungierten Darstellung. Natürlich kommutieren diese Abbildungen untereinander und können simultan diagonalisiert werden. Dies liefert Eigenzustände mit wohldefinierten Eigenwerten $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ zu H_1, \dots, H_r . Die Eigenwerte μ_j heißen Gewichte und μ heißt Gewichtsvektor. Wir notieren die (normierten) Eigenzustände durch Angabe des Gewichtsvektors als

$$|\mu, D\rangle \quad (4.52)$$

sofern der Eigenraum zu μ eindimensional ist, also μ nicht entartet ist. Bei Entartung wird geeignet durchnummeriert. Falls nur eine konkrete Darstellung D untersucht wird, lassen wir auch die Angabe von D im Eigenzustand weg, also $|\mu, D\rangle = |\mu\rangle$.

Wie oben schon erwähnt haben die Gewichtsvektoren der adjungierten Darstellung eine besondere Bedeutung und heißen Wurzeln.

4.1.2 Auf- und Absteiger

Wir werden die e_α als Auf- und Absteiger benutzen wie $J^\pm = (J^x \pm iJ^y)/2$ der $\mathfrak{su}(2)$. Zur Erinnerung

$$\text{Rang } \mathfrak{su}(2) = 1, \quad [J^z, J^\pm] = \pm J^\pm \quad (4.53)$$

$$[J^+, J^-] = J^z \quad (4.54)$$

mit der Entsprechung $h_j \sim J^z$, $e_{\pm\alpha} \sim J^\pm$. Im allgemeinen haben wir nun mehr Auf- und Absteiger als in der $\mathfrak{su}(2)$.

Sei nun irgendeine Darstellung D der betrachteten Liealgebra gegeben und $|\mu, D\rangle$ ein Zustand mit Gewichtsvektor μ , so gilt

$$H_j E_\alpha |\mu, D\rangle = \left(\underbrace{[H_j, E_\alpha]}_{\alpha_j E_\alpha} + E_\alpha \underbrace{H_j}_{\mu_j |\mu, D\rangle} \right) |\mu, D\rangle \quad (4.55)$$

$$= (\mu + \alpha)_j E_\alpha |\mu, D\rangle \quad (4.56)$$

Sofern $E_\alpha |\mu, D\rangle$ ungleich 0 ist, ist dies ein Eigenvektor zum Gewicht $\mu + \alpha$.

Wir fragen uns nun, was $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ ausgedrückt durch die Basiselemente ist? Der Zustand $E_\alpha |e_{-\alpha}\rangle$ in der adjungierten Darstellung hat Gewicht 0, also

$$E_\alpha |e_{-\alpha}\rangle = \sum_j \beta_j |h_j\rangle \quad (4.57)$$

$$\beta_i = \langle H_i | \underbrace{E_\alpha |e_{-\alpha}\rangle}_{|[E_\alpha, E_{-\alpha}]}\rangle = \frac{1}{\kappa} \text{Sp}(H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \frac{1}{\kappa} \text{Sp}(\underbrace{E_{-\alpha}}_{E_\alpha^+} \underbrace{[H_i, E_\alpha]}_{\alpha_i E_\alpha}) \quad (4.58)$$

$$= \alpha_i \langle E_\alpha, E_\alpha \rangle = \alpha_i \quad (4.59)$$

$$\Rightarrow [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_j \alpha_j H_j \quad (4.60)$$

Zurück zur Darstellung D : Wir definieren die normierten Zustände $|\mu \pm \alpha, D\rangle$

$$E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle =: \underbrace{N_{\pm\alpha, \mu}}_{\in \mathbb{C}} |\mu \pm \alpha, D\rangle \quad (4.61)$$

Bemerkung: Es ist angebracht anzunehmen, daß $|\mu, D\rangle$ Eigenzustand zu $E_{-\alpha} E_\alpha$ ist, möglich denn:

$$[H_j, E_{-\alpha} E_\alpha] = \underbrace{[H_j, E_{-\alpha}]}_{-\alpha_j E_{-\alpha}} E_\alpha + E_{-\alpha} \underbrace{[H_j, E_\alpha]}_{\alpha_j E_\alpha} = 0 \quad (4.62)$$

Gewonnen: $E_{\pm\alpha}$ sukzessive angewandt führen – bis auf Normierung – zum Ausgangs-

zustand zurück. Hier also gilt: Zustände zum gleichen Gewicht sind linear abhängig.

Berechnung der Normen $N_{\pm\alpha,\mu}$

Voraussetzung $\langle \mu, D | \mu, D \rangle = 1$.

$$\langle \mu, D | [E_\alpha, E_{-\alpha}] | \mu, D \rangle = \langle \mu, D | \sum_j \alpha_j H_j | \mu, D \rangle = \sum_j \alpha_j \mu_j = \alpha \cdot \mu \quad (4.63)$$

= ausgerechnet über die Produkte im Kommutator

$$= \langle \mu, D | E_\alpha \underbrace{E_{-\alpha} | \mu, D \rangle}_{N_{-\alpha,\mu} | \mu - \alpha, D \rangle} - \langle \mu, D | E_{-\alpha} \underbrace{E_\alpha | \mu, D \rangle}_{N_{\alpha,\mu} | \mu + \alpha, D \rangle} \rangle \quad (4.64)$$

$$= |N_{-\alpha,\mu}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 \quad (4.65)$$

Wir können aber das Objekt N_{\dots} mit erstem Index $-\alpha$ auf das Objekt mit Index α umrechnen

$$N_{-\alpha,\mu} = \langle \mu - \alpha, D | \underbrace{E_{-\alpha} | \mu, D \rangle}_{E_\alpha^+} \rangle = \langle \mu, D | E_\alpha | \mu - \alpha, D \rangle^* = N_{\alpha,\mu-\alpha}^* \quad (4.66)$$

Also

$$|N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 = \alpha \cdot \mu \quad (4.67)$$

Das wiederholte Anwenden von E_α oder $E_{-\alpha}$ auf $|\mu, D\rangle$ muß irgendwann auf 0 führen (endliche Dimensionalität der Darstellung). Seien p, q die kleinsten natürlichen Zahlen, so daß

$$E_\alpha |\mu + p\alpha, D\rangle = 0, \quad E_{-\alpha} |\mu - q\alpha, D\rangle = 0, \quad (4.68)$$

dann

$$\begin{aligned}
|N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 - \overbrace{|N_{\alpha, \mu+p\alpha}|^2}^0 &= \alpha \cdot (\mu + p\alpha) \\
|N_{\alpha, \mu+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu+(p-1)\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu + (p-1)\alpha) \\
\cdot &\cdot \\
|N_{\alpha, \mu}|^2 - |N_{\alpha, \mu+\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu + \alpha) \\
|N_{\alpha, \mu-\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu}|^2 &= \alpha \cdot \mu \\
\cdot &\cdot \\
|N_{\alpha, \mu-q\alpha}|^2 - |N_{\alpha, \mu-(q-1)\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu - (q-1)\alpha) \\
\overbrace{|N_{\alpha, \mu-(q+1)\alpha}|^2}^{N_{-\alpha, \mu-q\alpha}^*=0} - |N_{\alpha, \mu-q\alpha}|^2 &= \alpha \cdot (\mu - q\alpha)
\end{aligned}$$

Nun addieren wir alles und erhalten auf der linken Seite 0, auf der rechten Seite aber

$$0 = (p+q+1)(\alpha \cdot \mu) + \alpha^2 \left(\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} \right) \quad (4.69)$$

$$= (p+q+1) \left(\alpha \cdot \mu + \frac{\alpha^2}{2}(p-q) \right) \quad (4.70)$$

woraus dann

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) \quad (4.71)$$

folgt.

Bemerkung: Wir können auch alle $|N_{\alpha, \mu}|^2$ durch μ, α, p, q bestimmen.

Wir wenden diese Erkenntnisse zunächst auf die adjungierte Darstellung an. Sei also das Gewicht μ eine Wurzel, d.h. $\mu \rightarrow \beta$, dann gilt

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) = \frac{m}{2}, \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z} \quad (4.72)$$

Umgekehrt, d.h. $\alpha \leftrightarrow \beta$, folgt auch

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = \frac{m'}{2}. \quad (4.73)$$

Produktbildung

$$\frac{mm'}{4} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \cos^2 \theta, \quad (4.74)$$

wobei θ der Winkel zwischen den Wurzeln α und β ist. Die einzigen Möglichkeiten, d.h.

$0 \leq \frac{mm'}{4} \leq 1$, sind

mm'	θ
0	90°
1	$60^\circ, 120^\circ$
2	$45^\circ, 135^\circ$
3	$30^\circ, 150^\circ$
4	$0^\circ, 180^\circ$

Nachtrag: Der Erzeuger E_α zu einer Wurzel α ist eindeutig.

Beweis: Nehmen wir an, es gäbe E_α und E'_α linear unabhängig. Wir können dann E_α und E'_α orthogonal wählen

$$\langle E_\alpha | E'_\alpha \rangle = 0 \quad \text{in der adjungierten Darstellung bzgl. der Killing-Form} \quad (4.75)$$

Aus einer Überlegung wie zu (4.57) und Folgegleichungen (mit u.a. $\beta_i = 0$) ergibt sich zunächst

$$E_\alpha |e'_{-\alpha}\rangle = 0 \quad (4.76)$$

und nach der Charakterisierung (4.68) mit $\mu = -\alpha$ ist $p = 0$ und sodann folgt

$$-1 = \frac{\alpha \cdot (-\alpha)}{\alpha^2} = \frac{1}{2}q \geq 0 \quad (4.77)$$

ein Widerspruch.

Beispiel $\mathfrak{su}(3)$ zu Winkelverhältnissen der Wurzeln.

Wir hatten die 6 Wurzeln der $\mathfrak{su}(3)$ explizit bestimmt. Die Winkel zwischen ihnen sind tatsächlich Vielfache von 60° .

Beispiel $\mathfrak{su}(3)$ Gewichte der definierenden Darstellung.

Wir haben es zu tun mit 3×3 -Matrizen, u.a.

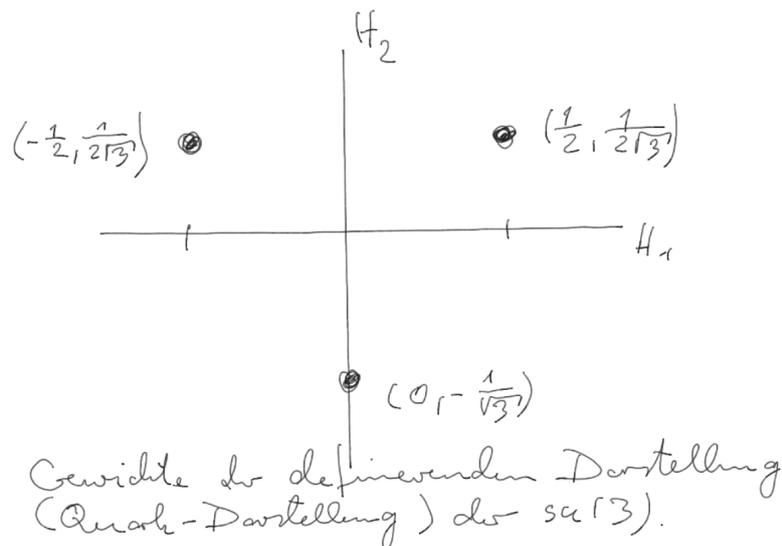
$$H_1 = \frac{\lambda_3}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{\lambda_8}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Die Diagonalisierung "ist bereits geschehen": Wir lesen die Eigenwerte einfach ab

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (4.79)$$

Die Spaltenvektoren sind die Eigenzustände der 3-dimensionalen Darstellung. Die 2-

dimensionalen Zeilenvektoren bzw. 2er-Tupel sind die Gewichtsvektoren.



Man sieht, daß die 6 Auf- und Ab-steiger, d.h. die Erzeuger zu den 6 Wurzeln, die Eigenzustände ineinander überführen. Noch offensichtlicher ist, daß die 6 Wurzeln durch Addition die 3 Gewichtsvektoren ineinander überführen, sofern “diese Operation erlaubt ist”. Dies liefert auch eine alternative Bestimmung der Wurzeln: es gibt 3 Paare an Gewichtsvektoren, deren Differenzen die Wurzeln liefern. (Verallgemeinert sich auf $su(N)$.)

Im Gegensatz zu allen Darstellungen der $su(2)$ und den adjungierten Darstellungen beliebiger Liealgebren sehen wir hier, daß die definierende Darstellung der $su(3)$ nicht reell ist. Diese Darstellung heißt die Quark-Darstellung. Die dazu komplex konjugierte ist die Anti-Quark-Darstellung.

Definition Komplex konjugierte Darstellung

Seien die Erzeuger einer Liealgebra in einer Darstellung D als Abbildungen oder Matrizen X_a gegeben, so erfüllen auch $-X_a^*$ die gleichen Vertauschungsrelationen. Damit ist $a \mapsto -X_a^*$ eine Darstellung, die zu D komplex konjugierte Darstellung \bar{D} .

Ist μ Gewichtsvektor zu D , so ist $-\mu$ Gewichtsvektor zu \bar{D}

$$(H - \lambda) |\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow (H^* - \lambda^*) |\psi\rangle^* = 0 \tag{4.80}$$

aber $\lambda^* = \lambda$, da Gewichte immer reell sind. Damit ist $-\lambda$ Eigenwert zu $-H^*$.

Bemerkung: Ist \bar{D} gleich (oder äquivalent zu) D , so heißt D reelle Darstellung. Da die Menge der Gewichte der definierenden Darstellung der $su(3)$ nicht invariant bzgl. Multiplikation mit (-1) ist, kann diese Darstellung nicht reell sein.

4.2 Einfache Wurzeln

Wir führen eine Anordnung der Gewichtsvektoren einer Lie-Algebra ein: Wähle eine Basis der Cartanschen Unteralgebra (mit Anordnung)

$$H_1, H_2, \dots, H_r \tag{4.81}$$

Dadurch sind die Komponenten (mit Anordnung) eines Gewichtsvektors $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$ festgelegt.

Ein Gewichtsvektor μ heiße positiv (negativ), falls der erste nichtverschwindende Eintrag positiv (negativ) ist. (Jedes μ ist entweder positiv, negativ oder $\vec{0}$.)

Für μ und ν sagen wir $\mu > \nu$, falls $\mu - \nu > 0$.

Beachte: Die Definition beinhaltet ein gewisses Maß an Willkür. Infolgedessen können gewisse Feststellungen basisabhngig sein.

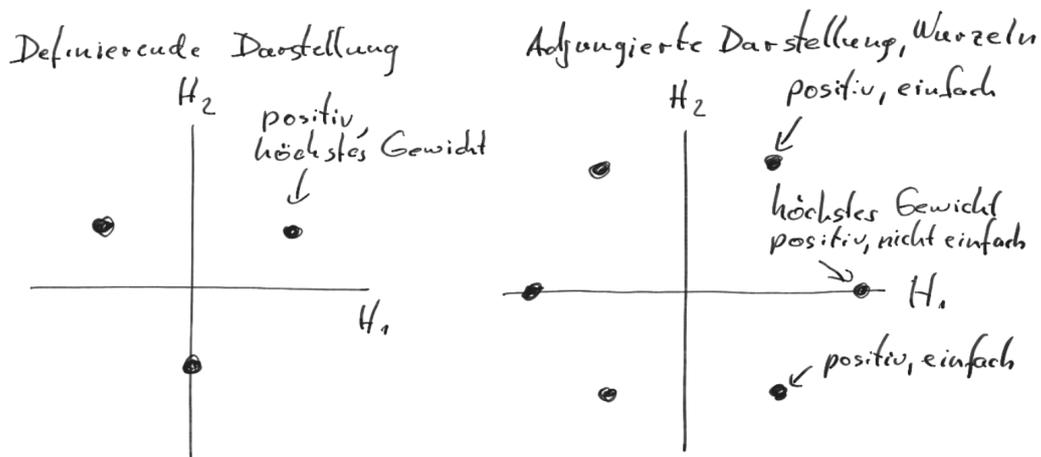
Definitionen

Höchstes Gewicht einer irreduziblen Darstellung: Gewicht größer als alle anderen. Das höchste Gewicht ist eindeutig, d.h. der zugehörige Raum ist eindimensional.

In adjungierter Darstellung: Liealgebra-Elemente zu positiven (negativen) Wurzeln fassen wir als Auf- und Absteiger im engeren Sinn auf. Aufsteiger auf ein höchstes Gewicht angewandt liefern 0.

Eine positive Wurzel heißt einfache Wurzel, falls sie nicht als Summe von zwei positiven Wurzeln geschrieben werden kann.

Beispiel: $su(3)$



Wir wollen zeigen, daß die einfachen Wurzeln die vollständige Struktur der Algebra bestimmen.

Satz: Seien α, β einfache Wurzeln, dann gilt

- (i) $\beta - \alpha$ ist keine Wurzel,
- (ii) $\frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha||\beta|} = -\frac{1}{2}\sqrt{pp'}, \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{p}{p'}, \quad \text{für } p, p' \in \mathbb{N}.$

Beweis: (keine Zeit/selbst)

Bemerkung: Insbesondere gilt für den Winkel θ zwischen α und β : $\pi/2 \leq \theta < \pi$.

Satz

- (i) Die Menge der einfachen Wurzeln ist linear unabhängig.
- (ii) Die Anzahl der einfachen Wurzeln ist gleich dem Rang der Algebra.
- (iii) Jede positive Wurzel ist Summe von einfachen Wurzeln mit Koeffizienten aus \mathbb{N} .

Satz: Die Menge aller Wurzeln ist eindeutig durch die relativen Längen und Winkel zwischen den einfachen Wurzeln bestimmt.

Beispiel: $su(3)$, einfache Wurzeln sind $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \beta = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Folglich $\alpha^2 = \beta^2 = 1, \alpha \cdot \beta = -1/2$. Hieraus folgt

$$\frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = \left(\frac{2\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = \right) - 1 = -(p - q). \quad (4.82)$$

Allein hieraus und aus $q = 0$, denn $\beta - \alpha$ ($\alpha - \beta$) ist keine Wurzel, folgt $p = 1$ und daraus wiederum $\beta + \alpha$ ist Wurzel, nicht jedoch $\beta + 2\alpha$ (oder $\alpha + 2\beta$). Womit die Existenz von 3

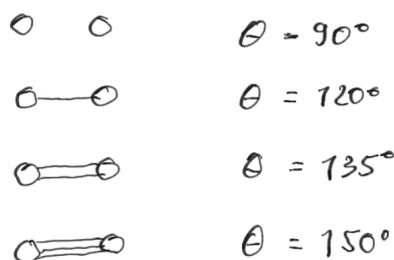
positiven und 3 negativen Wurzeln bei vorhandenen 2 linear unabhängigen Elementen der Cartan-Unteralgebra gezeigt ist.

4.2.1 Dynkin Diagramme

Zusammenfassung des Bisherigen:

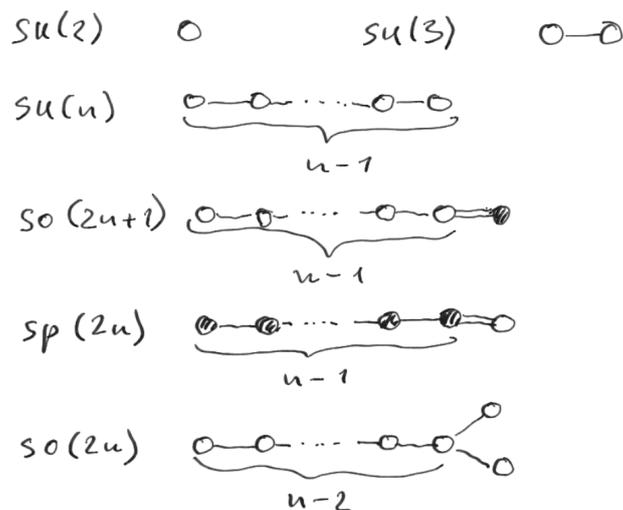
Die einfachen Wurzeln (d.h. Kenntnis der gegenseitigen Winkel- und Längenverhältnisse) bestimmen die Menge aller Wurzeln. Aus diesen wiederum läßt sich die vollständige Algebra (u.a. Auf-, Absteiger zu Wurzeln, Normierungen $N_{\alpha,\beta}$) ermitteln. Wir führen eine diagrammatische Notation ein

- (i) Zeichne für jede einfache Wurzel einen offenen Kreis \circ .
- (ii) Verbinde offene Kreise paarweise durch eine k -fache Linie ($k = 0, 1, 2, 3$), je nach eingeschlossenem Winkel θ



- (iii) Längenverhältnisse können durch unterschiedliche Schraffierungen der offenen Kreise festgehalten werden, sofern nötig.

Beispiele:



4.2.2 Fundamentale Gewichte

Wir indizieren die r einfachen Wurzeln durch

$$\alpha^i, i = 1, \dots, r, \quad (4.83)$$

wobei der obere Index die einfache Wurzel spezifiziert und ein möglicher weiterer unterer Index die jeweilige Komponente dieser Wurzel. (Achtung: beide Indizes haben den gleichen Wertebereich.)

Sei nun D irgendeine irreduzible Darstellung und μ sei das höchste Gewicht: Für kein i ist $\mu + \alpha^i$ ein Gewicht, oder: für alle i ist $E_{\alpha^i} |\mu, D\rangle = 0$, d.h. “ $p = 0$ ” und

$$\frac{2\alpha^i \cdot \mu}{(\alpha^i)^2} = q^i \in \mathbb{N}. \quad (4.84)$$

Da die α^i linear unabhängig sind, bestimmen die $q^i \in \mathbb{N}$ das Gewicht μ , von dem ausgehend die ganze Darstellung D durch Absteiger $E_{-\alpha^i}$ konstruiert werden kann.

Definiere r fundamentale Gewichte μ^1, \dots, μ^r (jeweils r -Tupel) durch

$$\frac{2\alpha^i \cdot \mu^j}{(\alpha^i)^2} = \delta^{ij}, \quad (4.85)$$

die zugehörigen fundamentalen Darstellungen bezeichnen wir mit D^1, \dots, D^r .

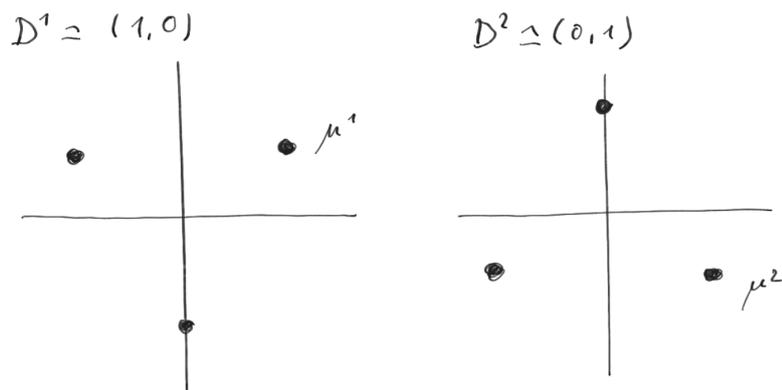
Ein beliebiges höchstes Gewicht μ kann eindeutig als Summe von μ^i 's geschrieben werden

$$\mu = \sum_i q^i \mu^i, \quad (4.86)$$

und die zugehörige Darstellung $D \hat{=} (q^1, q^2, \dots, q^r)$ findet sich in einem Tensorprodukt aus q^1 mal $D^1 \otimes q^2$ mal $D^2 \otimes \dots$.

Beispiel: su(3) einfache Wurzeln $\alpha^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \alpha^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (4.87)

 fundamentale Gewichte $\mu^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \mu^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ (4.88)



4.2.3 Beliebige irreduzible Darstellungen $D = (q^1, \dots, q^r)$

mit Höchstgewicht $\mu = \sum_i q^i \mu^i$. Offenbar spannen

$$E_{\Phi_1} E_{\Phi_2} \dots E_{\Phi_m} |\mu\rangle, \quad \Phi_j \text{ Wurzel}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.89)$$

den gesamten Darstellungsraum auf. Ohne Verlust der Vollständigkeit, können positive Φ_j ausgeschlossen werden (Durchkommutieren liefert Terme mit weniger Faktoren und $\dots E_{\Phi_j} |\mu\rangle = 0$).

Jede negative Wurzel Φ_j ist Summe von einfachen Wurzeln mit nicht-positiven ganzzahligen Koeffizienten. Also reicht es Zustände der Form

$$E_{-\beta_1} E_{-\beta_2} \dots E_{-\beta_m} |\mu\rangle, \quad \beta_j \text{ einfache Wurzel}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4.90)$$

zu berücksichtigen.

Problem:

- (i) Welche Gewichte $\mu - \sum_i \beta_i$ sind erlaubt?
- (ii) Was ist die Dimension der Räume zu erlaubten Gewichten?

Einfache Situation: Gewichte der Form $\mu - n \cdot \alpha^i$ sind

erlaubt für $n = 0, 1, \dots, q^i$, Zustände eindeutig

nicht erlaubt für $n > q^i$.

Zu "gemischten Gewichten" siehe Beispiele.

Konstruktionshilfe Weyl-Spiegelungen

Ausgangspunkt:

- (i) Jede Wurzel α erzeugt eine $\mathfrak{su}(2)$ -Unteralgebra.

(ii) Alle Darstellungen der $\mathfrak{su}(2)$ sind reell mit Gewichten symmetrisch um 0.

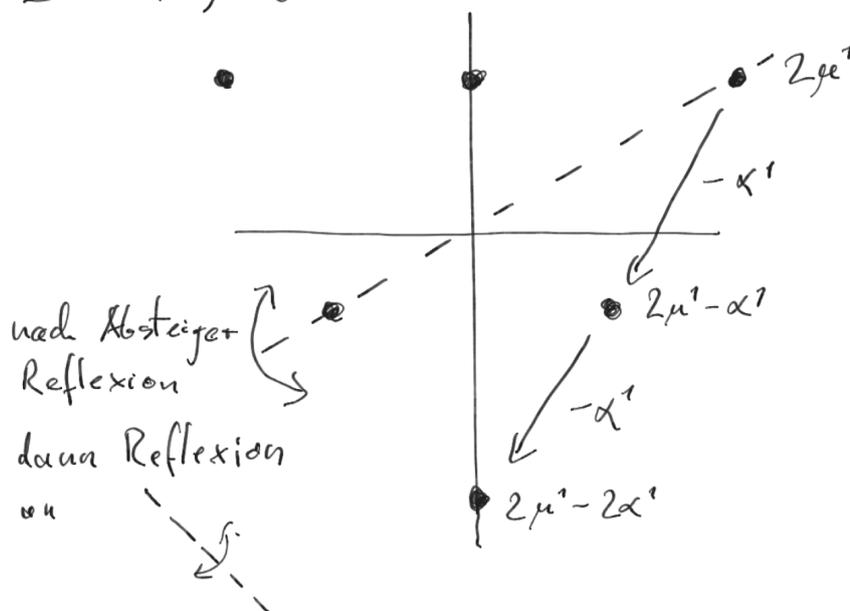
Folglich gehört zu einem beliebigen Gewicht μ und beliebiger Wurzel α auch ein Gewicht

$$\mu - \frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \alpha \quad (4.91)$$

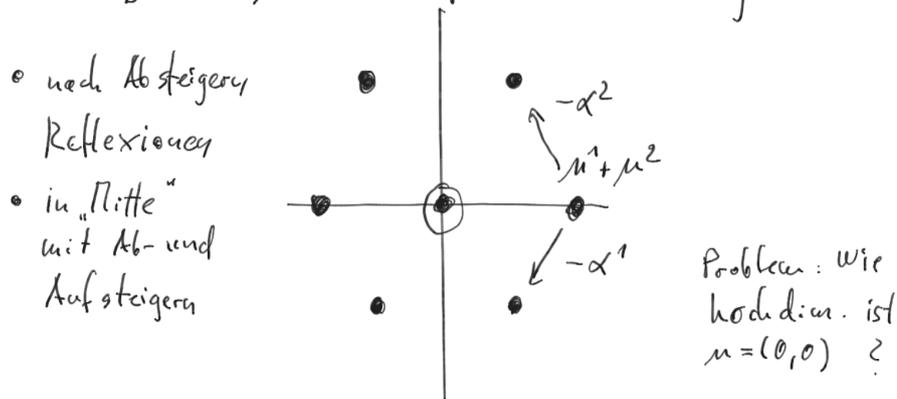
Falls zu μ ein d -dimensionaler Raum gehört, so gilt dieses auch für das Spiegelbild $\mu - \dots$

Die Menge der Gewichte einer Darstellung zeigt Reflexionssymmetrie an $(r-1)$ -dimensionalen Hyperebenen senkrecht zu α .

$D = (2,0)$ 6-dimensional

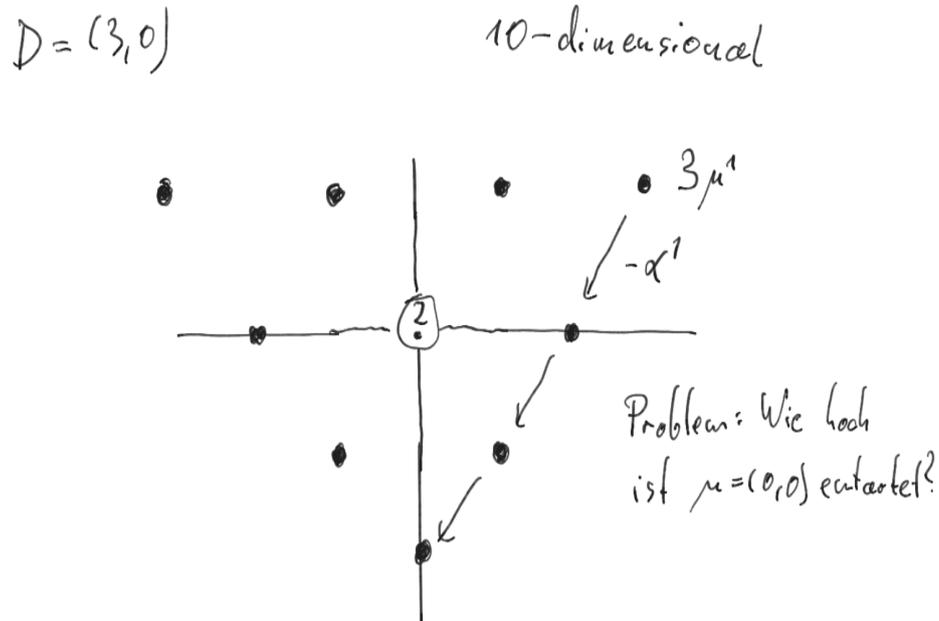


$D = (1,1)$ Adjungierte Darstellung 8-dim



Wir wissen, daß das Gewicht $(0,0)$ der adjungierten Darstellung zweifach entartet

ist. In der Konstruktion ausgehend vom Höchstgewicht müssen wir auf unabhängigen Pfaden linear unabhängige Zustände finden. Der Beweis der linearen Unabhängigkeit sollte über die Gram-Schmidt-Determinante gelingen.



Wir wissen natürlich, daß das Gewicht $(0, 0)$ einen mindestens eindimensionalen Eigenraum hat. Hier wollen wir zeigen, daß die Zustände über verschiedene “Pfade” ausgehend von $\mu = 3\mu^1$

$$E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle, \quad E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle, \quad (4.92)$$

linear abhängig sind. Wir betrachten den 2. Zustand und führen ihn auf den 1. zurück

$$E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle \quad (4.93)$$

$$= \underbrace{[E_{-\alpha^2}, E_{-\alpha^1}]}_{\sim E_{-\alpha^1 - \alpha^2}} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle + E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle \quad (4.94)$$

was mit $E_{-\alpha^1}$ kommutiert, da $-2\alpha^1 - \alpha^2$ keine Wurzel ist (4.95)

$$= E_{-\alpha^1} [E_{-\alpha^2}, E_{-\alpha^1}] |\mu\rangle + E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle \quad (4.96)$$

$$= 2E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} E_{-\alpha^1} |\mu\rangle - E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^1} \underbrace{E_{-\alpha^2}}_0 |\mu\rangle, \quad \text{da } q^2 = 0. \quad (4.97)$$

4.2.4 Tensordarstellungen

Seien V_i , $i = 1, \dots, t$, Vektorräume mit Darstellungen D_i der Lie-Algebra, dann ist in $V_1 \otimes \dots \otimes V_t$ durch $D = D_1 \otimes \dots \otimes D_t$ wie folgt eine Darstellung gegeben

$$D(X_a) = \sum_{i=1}^t \underbrace{id \otimes \dots \otimes id}_{(i-1)\text{mal}} \otimes D_i(X_a) \otimes \underbrace{id \otimes \dots \otimes id}_{(t-i)\text{mal}} \quad (4.98)$$

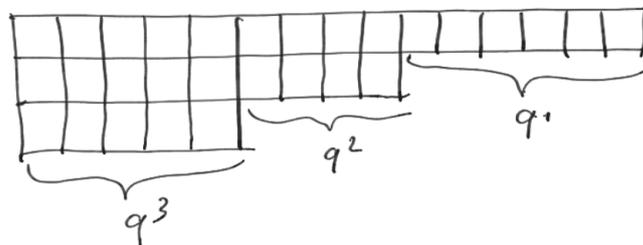
Die traditionelle Indexschreibweise haben wir schon in den Übungen bzw. für die $su(2)$ in der QM I kennengelernt.

D ist im allgemeinen nicht irreduzibel.

Hier wollen wir für $su(N)$ angeben wie die Darstellung zu einem beliebigen Höchstgewicht $\mu = \sum_{k=1}^r q^k \mu^k$ aus einem t ($= \sum_{k=1}^r k q^k$)-fachen Tensorprodukt der N -dimensionalen definierenden/fundamentalen Darstellung $D^1 = (1, 0, \dots, 0)$ folgt. Da in diesem Fall alle Räume $V_1 = \dots = V_t$ und alle "lokalen" Darstellungen $D_1 = \dots = D_t$ ($= D^1$) gleich sind, vertauscht $D(X_a)$ wie in (4.98) mit allen Permutationen der Räume V_1, \dots, V_t . Wir können also zu unter der Wirkung der Permutationen (der symmetrischen Gruppe S_t) invarianten Unterräumen über gehen. Dies liefert niedriger-dimensionale Darstellungsräume.

Achtung diese Unterräume können, müssen aber nicht irreduzibel sein. Sie kennen dies von der $su(2)$: In einem Tensorprodukt von 3 Spin-1/2-Darstellungen befinden sich 2 Spin-1/2 und 1 Spin-3/2-Darstellung.

Die irreduzible Darstellung (q^1, \dots, q^r) ergibt sich aus einem Young-Diagramm mit q_k Spalten der Höhe k



Indiziere Kästchen durch fortlaufende ganze Zahlen $j = 1, \dots, t$. Jedes \bar{j} steht für den Raum V_j mit Darstellung D^1 . Wende den Operator $A \cdot S$ auf $V_1 \otimes \dots \otimes V_t$ an, wobei die Operatoren S Symmetrisierungen in jeder Zeile und A Antisymmetrisierungen in jeder Spalte vornehmen. (Näheres: siehe "Gruppen und Darstellungstheorie".) Der

Operator $A \cdot S$ liefert die Projektion auf ein irreduzibles Multipllett zur Darstellung (q^1, \dots, q^r) .

Dimensionsformel für $su(N)$ Darstellungen

Schreibe ganze Zahlen in die Kästchen des Schemas:

- (i) links oben N
- (ii) weiter nach rechts (unten) in Einerschritten wachsend (fallend)

$$\text{Dimension} = \frac{F}{H}, \quad F = \text{Produkt aller Einträge} \quad (4.99)$$

$$H = \text{Produkt aller Hakenlängen} \quad (4.100)$$

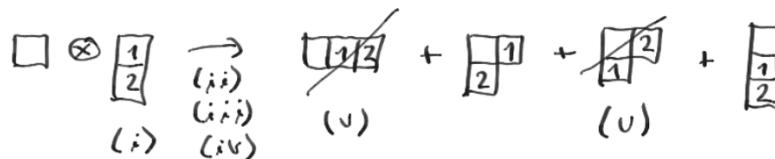
Bemerkung: die Dimension ist 0, wenn Spalten höher als N sind.

Beispiel: Darstellung $(1, 1)$

$F = (N-1)N(N+1)$ $H = 3$ $\text{Dim} = \frac{N(N^2-1)}{3}$
 $\rightarrow 8$ für $N=3$ (bekannt)

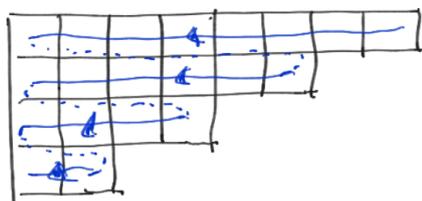
Hakenlängen

Ausreduktion von Produkten von Young-Diagrammen



- (i) Schreibe in das 2. Schema in jedes Kästchen der j -ten Zeile die Ziffer j .
- (ii) Hänge die Kästchen des 2. Diagramm an das 1. Diagramm, so daß erlaubte Diagramme entstehen (also: Zeilenlänge von oben nach unten nicht zunehmend, maximale Spaltenhöhe = N)
- (iii) In jeder Zeile von links nach rechts dürfen die Zahlen (des 2. Tableau) nicht abnehmen.
- (iv) In jeder Spalte von oben nach unten müssen die Zahlen zunehmen.

(v) Zeichne Pfad



Entlang des Pfads darf die Zahl j an keinem Punkt öfter vorgekommen sein als $(j - 1)$.

Literatur

- [1] Gernot Münster: Quantentheorie, de Gruyter Studium (2020)
<https://doi.org/10.1515/9783110479966>
Kapitel 25
- [2] Franz Schwabl: Quantenmechanik für Fortgeschrittene, Springer Verlag (1997)
Kapitel 5, 6, ...
- [3] Albert Messiah: Quantenmechanik. Band 2, de Gruyter (1991)
Albert Messiah: Quantum Mechanics, Dover Books on Physics (2014) English
edition 1+2
Kapitel/chapter 20
- [4] James D. Bjorken, Sidney D. Drell: Relativistische Quantenfeldtheorie, Spek-
trum Akademischer Verlag (1967)
- [5] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li: Gauge Theory of Elementary Particle Physics:
Problems and Solutions, Oxford University Press, USA (2000)
- [6] Claude Itzykson, Jean Bernard Zuber: Quantum Field Theory, Dover Books
on Physics (2006)
- [7] Howard Georgi: Lie Algebras In Particle Physics : from Isospin To Unified
Theories, Taylor and Francis, 2000
<https://library.oapen.org/bitstream/20.500.12657/50876/1/9780429967764.pdf>