FQM problem Sheet 11 in WS 2022/2023

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Svyatoslav Karabin (karabin@uni-wuppertal.de D.10.01)

Submission: 11.01.2023, 12:00 in the P.O. Box Karabin on D.10
Discussion: 11.01.2023, 14:00 – 16:00

1. **Commutator of two KG field operators** (9)
   The Klein-Gordon field is given by

$$\varphi(x,t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a(k)e^{i(k\cdot x-\omega_k t)} + a^\dagger(k)e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}] = \int d^3k\,[a(k)f_k(x,t) + a^\dagger(k)f_k^*(x,t)]$$

   Where $\omega_k = +\sqrt{k^2+m^2}$.

   (a) **Show**

$$[\varphi(x,t),\varphi(x',t')] = \frac{-1}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,k\,\frac{\sin\sqrt{k^2+m^2}T}{\sqrt{k^2+m^2}}(e^{ikR}-e^{-ikR})$$

   where $T = t - t'$ and $R = |x - x'|$.

   (b) **Simplify** this (operator-valued!) result using the residual theorem for the case $|T| < R$.

2. **Propagators** (10)
   Calculate the transition amplitude / propagator $\langle x';t'|x;t\rangle$ of a

   (a) free particle with Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

   (b) harmonic oscillator with Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

   using the path integral formalism. **Note**: To calculate the propagator of the harmonic oscillator, it is useful to develop the path integral around the classical path, i.e. $x(t) = x_{class}(t) + \delta x(t)$. The contribution of the classical path can be calculated using the classical equation of motion. For the variation $\delta x(t)$ it can be assumed that it is representable by a Fourier series.

Deutsch: nächste Seite

1. **Kommutator zweier KG-Feldoperatoren** (9)
   Gegeben Sei das Klein-Gordon Feld

$$\varphi(x,t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a(k)e^{i(k\cdot x-\omega_k t)} + a^\dagger(k)e^{-i(k\cdot x-\omega_k t)}] = \int d^3k\, [a(k)f_k(x,t) + a^\dagger(k)f_k^*(x,t)]$$

   wobei $\omega_k = +\sqrt{k^2+m^2}$.

   (a) **Zeigen Sie**

$$[\varphi(x,t),\varphi(x',t')] = \frac{-1}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k\, \frac{\sin\sqrt{k^2+m^2}T}{\sqrt{k^2+m^2}}(e^{ikR} - e^{-ikR})$$

   wobei $T = t - t'$ und $R = |x - x'|$.

   (b) **Vereinfachen Sie** dieses (operatorwertige!) Ergebnis mithilfe des Residuensatzes für den Fall $|T| < R$.

2. **Propagatoren** (10)
   Berechnen Sie die Übergangsamplitude / den Propagator $\langle x';t'|x;t\rangle$ eines

   (a) freien Teilchens mit Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

   (b) harmonischen Oszillators mit Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

   mithilfe des Pfadintegralformalismus.
   Hinweis: Zur Berechnung des Propagators des harmonischen Oszillators ist es sinnvoll das Pfadintegral um den klassischen Pfad zu entwickeln, i.e. $x(t) = x_{class}(t) + \delta x(t)$. Der Beitrag des klassischen Pfades kann mithilfe der klassischen Bewegungsgleichung berechnet werden. Für die Schwankung $\delta x(t)$ kann angenommen werden, dass sie durch eine Fourierreihe darstellbar ist.