Fortgeschrittene Mathematische Methoden - Wintersemester 2024/25

A. Klümper*

*Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal, 42097 Wuppertal, Germany

kluemper@uni-wuppertal.de

Abstract

Die Vorlesungen und Übungen werden auf absehbare Zeit als Zoom-Meetings abgehalten.

Montags:	10:15-11:45 V 2
Donnerstags:	12:15-13:45 V 1 + Ü1

Der reguläre Ablauf der Übungen wird sein: Ausgabe des neuen Übungsblattes+Abgabe der Bearbeitungen des alten Blattes mittwochs, Besprechung am Donnerstag danach.

Die Inhalte der Vorlesung umfassen (mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung):

- Funktionentheorie: Komplexe Funktionen, Cauchy-Integralsatz, Residuensatz und Laurent-Reihen, Anwendungen in der Physik
- Fourieranalyse: Fourierreihen, Fourierintegraltheorem und Fouriertransformation
- Distributionen: Allgemeine Definition und Rechnen mit Distributionen, Dirac-Delta-Distribution, Distributionen auf Mannigfaltigkeiten
- Orthogonale Polynome: Legendre, Hermite, Laguerre, Tschebyscheff, Besselfunktionen, ...
- Kugelflächenfunktionen: Assozierte Legendre Funktionen, Kugelflächenfunktionen in der Anwendung

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionentheorie

Der Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wird als bekannt vorausgesetzt.

Frage: Wie berechnet man folgende Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{1+x^2} \mathrm{d}x \ ? \tag{1.1}$$

Wir werden in dieser Vorlesung Mittel und Wege kennenlernen, die dies leicht ermöglichen.

1.1 Komplexe Zahlen und Funktionen

Wir betrachten komplexwertige Funktionen

$$f : U \to \mathbb{C} \qquad \text{mit der Menge } \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1.2a}$$

$$z \mapsto f(z) \qquad \text{und } U \text{ ist offene Teilmenge von } \mathbb{C} \tag{1.2b}$$

Definition 1.1. *Zerlegung nach Real- und Imaginärteil*

$$z = x + \mathrm{i}\, y \quad \textit{mit } x, y \in \mathbb{R}; \quad x = \operatorname{Re} z, \ y = \operatorname{Im} z, \tag{1.3a}$$

$$\textit{statt } (x, y) \ \textit{oder} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.3b}$$

so daß die Multiplikation $\cdot$ “automatisch” richtig durchgeführt wird, wenn $\mathrm{i}^2 = -1$ beherzigt wird. Analog

$$f(z) = g(z) + \mathrm{i}\, h(z), \quad \textit{mit reellwertigen } g, h. \tag{1.4}$$

Definition 1.2. *Komplexe Konjugation*

$$\bar{z} := x - \mathrm{i}\, y, \tag{1.5}$$

mit obiger Notation für z.

Vorsicht: Wenn Objekte $\overline{f(z)}$ und $\overline{f}(z)$ nebeneinander benutzt werden, so ist mit $\overline{f}$ folgendes gemeint

$$\overline{f} : z \mapsto \overline{f(\overline{z})}. \tag{1.6}$$

In Worten: $\overline{f(z)}$ ist die komplexe Konjugation des Funktionswertes von z bzgl. f ist, wohingegen $\overline{f(\overline{z})}$ die komplexe Konjugation des Funktionswertes des konjugierten $\overline{z}$ bzgl. f bezeichnet.

Definition 1.3. *Betrag, Polarkoordinaten*

$$\textit{Betrag } |z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \qquad z = |z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \ \textit{mit geeigneter } \underline{\textit{Phase}} \ \phi \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Beispiel(e) 1.1. *Komplexe Konjugation und Notation*

a) Für $f(z) := x^2 + y^2 + \mathrm{i}2xy$ gilt

$$\overline{f(z)} = x^2 + y^2 - \mathrm{i}\,2xy, \text{ aber } \overline{f}(z) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}\,2xy. \tag{1.8}$$

Bemerkung: diese Funktion ist nicht holomorph in z. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

b) Für $f(z) := x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy = z^2$ gilt

$$\overline{f(z)} = \overline{z^2} = \overline{z}^2, \ \overline{f}(z) = z^2. \tag{1.9}$$

c) Für $f(z) := \mathrm{i}\,x - y = \mathrm{i}\,z$ gilt

$$\overline{f(z)} = -\mathrm{i}\,x - y = -\mathrm{i}\,\overline{z}, \ \overline{f}(z) = -\mathrm{i}\,z. \tag{1.10}$$

Bemerkung: Wenn eine Funktion durch Angabe des Funktionswertes mit expliziten Ausdrücken in Real- und Imaginärteil, d.h. x und y, gegeben ist, so kann sie durch z und $\overline{z}$ "geschrieben" werden, indem

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}), \tag{1.11}$$

eingesetzt wird. Im Beispiel a) erhält man so

$$f(z) = \frac{1}{4}\left(z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2\right) - \frac{1}{4}\left(z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2\right) + \frac{1}{2}\left(z^2 - \overline{z}^2\right) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}\overline{z}^2 + z\overline{z} \tag{1.12}$$

Man sieht, daß $f(x, y)$ durch z und $\overline{z}$ geschrieben im Falle a) ein Ausdruck mit beiden Argumenten z und $\overline{z}$ ist, in den Fällen b) und c) taucht jeweils nur z auf.

1.2 Holomorphe Funktionen

Komplexe Differenzierbarkeit ist mehr als Differenzierbarkeit von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Funktionen.

Definition 1.4. *(Komplexe Differenzierbarkeit) Eine Funktion f heißt in einem Punkt z_0 komplex differenzierbar, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft*

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0), \tag{1.13}$$

wobei $\mathcal{O}(z - z_0)$ eine Restfunktion "von höherer Ordnung", d.h. kleiner als $z - z_0$ bedeutet, also

$$\frac{\mathcal{O}(z - z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0\,. \tag{1.14}$$

Oder auch:

(i) $f(z)$ ist linear approximierbar in z_0.
(ii) Konvergenz des Differenzenquotienten

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} a\,. \tag{1.15}$$

Bemerkung: Die Formulierung (1.13) sieht genauso wie die der Differenzierbarkeit von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Funktionen aus. Achtung: In (1.13) wird verlangt, daß die als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aufgefaßte Operation $a\cdot$ eine Dreh-Streckung (oder Dreh-Stauchung) ist, siehe weiter unten.
Die Zahl a in (1.13) heißt die (komplexe) Ableitung von $f(z)$ nach z in z_0. Man schreibt wie im Reellen $f'(z_0)$ $(:= a)$.

Definition 1.5. *(Holomorphie)*
Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die überall auf U (offene Teilmenge von $\mathbb{C}$) komplex differenzierbar ist, heißt <u>*holomorph*</u>.

Beispiel(e) 1.2. *Komplexe (Nicht-) Differenzierbarkeit*

a) $f(z) := z$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} 1\,, \tag{1.16}$$

für jedes z_0. Tatsächlich ist der Differenzenquotient konstant gleich 1.

b) $f(z) := \overline{z}$ ist sicherlich reell differenzierbar, aber

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} ?\,, \tag{1.17}$$

Wir wollen zeigen, daß der Grenzwert nicht existiert bzw. von der “Richtung” $z \to z_0$ abhängt. Wir kürzen ab $\zeta := z - z_0$.

(i) Falls ζ rein reell ist, dann gilt $\overline{\zeta}/\zeta = \zeta/\zeta = 1$,

(ii) falls ζ rein imaginär ist, dann gilt $\overline{\zeta}/\zeta = -\zeta/\zeta = -1$,

und damit existiert kein von der gewählten Folge von Punkten z nach z_0 unabhängige Grenzwert.
Die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ ist in keinem Punkt z_0 komplex differenzierbar.

c) $f(z) := \operatorname{Re} z = x$ ist nicht komplex differenzierbar.
Dies versteht man am besten durch die Umschreibung $f(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, was die Summe einer komplex differenzierbaren und einer nicht komplex differenzierbaren Funktion ist.

Aber alle Funktionen a)-c) sind reell differenzierbar.

Theorem 1.1. *Summen, Produkte, Quotienten, Verkettungen, Umkehrungen von holomorphen Funktionen sind holomorph.*
Die bekannten Funktionen exp, log, sin, cos..., *die über Reihendarstellungen definiert sind, können auch im Komplexen definiert werden und sind im Konvergenzbereich holomorph. (Die Logarithmusfunktion* log *ist zunächst innerhalb eines Kreises des Radius 1 um 1 definiert, kann aber holomorph fortgesetzt werden. Mehr später.)*

Warum ist komplexe Differenzierbarkeit mehr als reelle Differenzierbarkeit? (Die Antwort ist im Prinzip oben gegeben, aber nicht die Konsequenzen.)

Erinnerung Reelle Differenzierbarkeit einer Abbildung $f = (g, h) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liegt in $z_0 = (x_0, y_0)$ vor, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (d.h. 2×2-Matrix) existiert, so daß

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(z - z_0) \tag{1.18}$$

oder noch expliziter

$$\begin{pmatrix} g(z) \\ h(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right), \tag{1.19}$$

wobei die Restfunktion (jetzt wieder mit z geschrieben) von Ordnung kleiner als $z - z_0$ ist: $\| o(z - z_0) \| / \| z - z_0 \| \to 0$ für jede Folge z gegen z_0 (hier ist $\| ... \|$ die Euklidische Norm).

Jede komplex differenzierbare Funktion erfüllt auch dieses Kriterium, aber nicht jede Funktion, die "ein A besitzt" ist auch komplex differenzierbar.
Für ein $f = g + \mathrm{i}\, h = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ wie oben gilt

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Wenn diese lineare Abbildung eine Dreh-Streckung darstellen soll, müssen die Diagonalelemente identisch und die Nebendiagonalen die negativen voneinander sein

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \underline{\text{Cauchy-Riemann DGL}}. \tag{1.21}$$

Wir können diese DGL auch im Formalismus der komplexen Differenzierbarkeit mittels Differenzenquotient herleiten. Der Limes in (1.15) existiert genau dann und ist insbes. unabhängig von der Richtung der Folge $z \to z_0$, wenn reelle Differenzierbarkeit vorliegt und in

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f, & \text{für } z - z_0 \text{ reell,} \\ \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial y} f, & \text{für } z - z_0 \text{ imaginär,} \end{cases} \tag{1.22}$$

die beiden Ergebnisse übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x}(g + \mathrm{i}\, h) = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i} \frac{\partial h}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial y}(g + \mathrm{i}\, h) = -\mathrm{i} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}, \tag{1.23}$$

was auf (1.21) führt.

Definition 1.6. *(Wirtinger-Ableitungen) Für eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die reell differenzierbar ist, können wir das reelle Differential schreiben als*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \tag{1.24}$$

wobei die Multiplikation als skalare Multiplikation von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ mit Elementen in $\mathbb{R}$ durchgeführt wird, aber mit der Multiplikation in $\mathbb{C}$ kompatibel ist (da der zweite Faktor reell ist). Mit (1.11)

$$df = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z}. \tag{1.25}$$

Es macht daher Sinn die partiellen Ableitungen von f nach z und $\overline{z}$ wie folgt zu definieren

$$\frac{\partial}{\partial z} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{1.26}$$

Bemerkung: Genau dann, wenn die Cauchy-Riemann DGL (1.21) erfüllt sind, ist $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f$ null und $\frac{\partial}{\partial z} f$ ist gleich f'.

In jedem Fall, wenn f reell differenzierbar ist, gilt

$$df = \frac{\partial}{\partial z} f \cdot dz + \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f \cdot d\overline{z}, \tag{1.27}$$

wobei $\cdot$ die komplexe Multiplikation bezeichnet, woraus folgt, daß die Ableitungen von f nach z bzw. $\overline{z}$ so gewonnen werden können, daß Sie zunächst $f(x, y)$ durch z und $\overline{z}$ ausdrücken, dann z und $\overline{z}$ als unabhängige komplexe Variable ansehen und nach z bzw. $\overline{z}$ (komplex) differenzieren.

Beispiel(e) 1.3. *(Cauchy-Riemann)*

(i) Sei $f(z) = x^3y^2 + \mathrm{i}\, x^2y^3$

$$\text{Cauchy} - \text{Riemann}: \quad 3x^2y^2 = 3x^2y^2 \text{ und } 2x^3y = -2xy^3\,. \tag{1.28}$$

Die erste Bedingung ist immer erfüllt, die zweite nur, wenn $xy = 0$ oder $x^2 + y^2 = 0$, also nur auf den Koordinatenachsen. Es gibt keine offene Untermenge von $\mathbb{C}$, in der die Cauchy-Riemann DGL erfüllt sind.

(ii) Sei $f(z) = \mathsf{e}^x \cos y + \mathrm{i}\, \mathsf{e}^x \sin y$

$$\text{Cauchy} - \text{Riemann}: \quad \mathsf{e}^x \cos y = \mathsf{e}^x \cos y \text{ und } \mathsf{e}^x(-\sin y) = -\mathsf{e}^x \sin y\,. \tag{1.29}$$

Hier sind beide Bedingungen überall erfüllt.
Dies erkennt man auch mittels

$$f(z) = \mathsf{e}^x \cos y + \mathrm{i}\, \mathsf{e}^x \sin y = \mathsf{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\, \sin y) = \mathsf{e}^x \mathsf{e}^{\mathrm{i}\, y} = \mathsf{e}^{x + \mathrm{i}\, y} = \mathsf{e}^z, \tag{1.30}$$

wobei zugegebenermaßen einige Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion sowie der trigonometrischen Funktionen benutzt wurden, die ja erst noch (mittels Holomorphie) zu beweisen sind.

Theorem 1.2. *Jede holomorphe Funktion $f = g + \mathrm{i}\,h$ ist harmonisch, insbes. sind Real- und Imaginär-Teil harmonische Funktionen, explizit für g*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g = 0, \tag{1.31}$$

und analog für h.

Beweis. Wir benutzen (beweisen allerdings erst später), daß holomorphe Funktionen direkt zweimal differenzierbar sind und setzen die Cauchy-Riemann DGL ineinander ein

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} g}_{=\frac{\partial}{\partial y}h} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} h = \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} h}_{=-\frac{\partial}{\partial y}g} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} g\,. \tag{1.32}$$

□

Bemerkung: In der Elektrodynamik bzw. -Statik, Hydrodynamik mit Zylindersymmetrie werden Lösungen der Laplace-Gleichung durch holomorphe Funktionen geliefert.

Theorem 1.3. *(Lokal konstante Funktionen)*
Sei f eine holomorphe Funktion, dann folgt aus jeder der folgenden Bedingungen, daß f (auf jeder Zusammenhangskomponente des Definitionsbereichs) konstant ist

(i) $f'(z) = 0$,

(ii) f *ist rein reell (alternativ: rein imaginär),*

(iii) $|f(z)| =$ *konstant.*

Beweis. Wir führen alle drei Fälle, evtl. nach Konstruktion geeigneter Hilfsfunktionen, auf die Charakterisierung durch verschwindende Ableitungen zurück.

(i) direkt nach reeller Analysis,

(ii) $f = g + \mathrm{i}\,0$, Cauchy-Riemann: $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$,

(iii) OBdA betrachten wir den Fall $|f(z)| = 1$. Wir nutzen den (holomorphen) komplexen Logarithmus und dessen "Rechenregeln" (insbes. $\log z = \log\left(|z| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right) = \log|z| + \mathrm{i}\phi$): $\log f(z) = \mathrm{Re}\log f(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\log f(z) = \log|f(z)| + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\log f(z) = 0 + \mathrm{i}\,$Imaginärteil. Dann ist nach (ii) die holomorphe Funktion $\log f(z)$ konstant und damit auch $f(z)$ konstant.

□

1.3 Konturintegrale

Definition 1.7. *Integrationsweg (Weg, Kontur) bezeichnet eine stückweis stetig differenzierbare Funktion $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Wenn $\dot{\gamma} \neq 0$ überall, dann heißt der Weg* glatt. *Wenn Anfangspunkt=Endpunkt, dann heißt der Weg geschlossen.*

Definition 1.8. *(Weg-, Kontur-Integral)*
Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder Teilmengen) definieren wir das Wegintegral entlang eines Weges γ durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{stetig}} \underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{stetig}} \, dt, \tag{1.33}$$

wobei das Integral existiert wie in Analysis I.

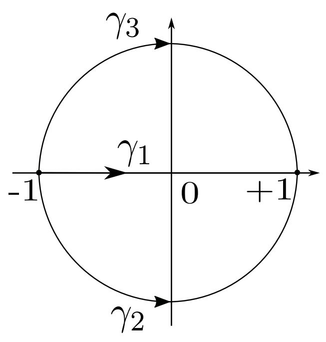
Man mag sich Fragen stellen wie

- Ist das Integral unabhängig von einer Umparametrisierung des Weges? Antwort: ja.
- Hängt das Integral nur von Anfangs- und End-Punkt des Weges ab? Antwort: Dies gilt für bestimmte komplexwertige Funktionen f. Wir werden sehen, daß dies wieder auf den Begriff der Holomorphie führt.

Bevor wir die allgemeine Theorie weitertreiben, hier ein paar Beispiele.

Beispiel(e) 1.4.

$f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$
Fälle $n \geqslant 0$, $n = -1$, $n < -1$ "verhalten sich" verschieden.
Wir betrachten drei Wege.



(i) Gerader Weg

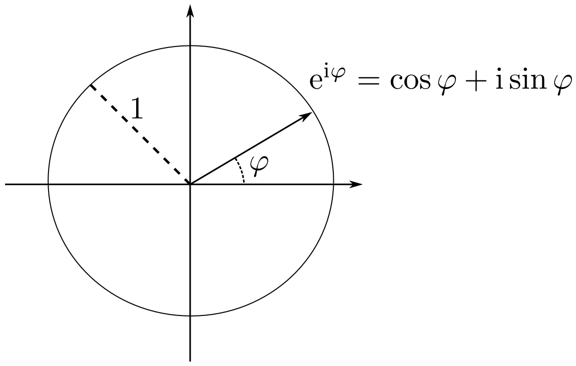
$$\gamma_1 : \quad \begin{aligned} &[-1, 1] \to \mathbb{C}, \qquad \dot{\gamma}_1 = 1, \\ &t \mapsto t \end{aligned} \tag{1.34a}$$

Dieser Weg führt durch 0, wo sich für $n < 0$ eine Singularität befindet. Das Integral von $f(z)$ entlang γ_1 existiert daher nur für $n \geqslant 0$.

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-1}^1 t^n \cdot 1 \cdot dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \tag{1.35}$$

(ii) Wir parametrisieren die untere Halbkreislinie mit einem Winkel von $-\pi$ bis 0

$$\gamma_2: \quad [-\pi, 0] \to \mathbb{C}, \quad \dot{\gamma}_2(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \qquad (1.36a)$$
$$t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$$



Wir integrieren

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right)^n \cdot \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \cdot dt = \mathrm{i}\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\,t}dt \underbrace{=}_{\text{nur für } n\neq -1} \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\,t}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{1.37}$$

Man sieht, daß für $n \geqslant 0$ das gleiche Ergebnis wie bei (i) vorliegt. Für $n < 0$ war das Integral entlang γ_1 nicht definiert. Hier für γ_2 ist es wohldefiniert und die “obige Formel” gilt für alle $n \neq -1$. Für $n = -1$ erhalten wir ein anderes, wohldefiniertes Ergebnis:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right)^{-1} \cdot \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \cdot dt = \mathrm{i}\int_{-\pi}^{0} dt = \mathrm{i}\,\pi. \tag{1.38}$$

(iii) Wir parametrisieren die obere Halbkreislinie im Uhrzeigersinn

$$\gamma_3: \quad [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \dot{\gamma}_2(t) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi-t)}, \tag{1.39a}$$
$$t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi-t)}$$

mit Anfangspunkt $\gamma_3(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$ und Endpunkt $\gamma_3(\pi) = \mathrm{e}^0 = 1$. Wir integrieren

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{0}^{\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi-t)}\right)^n \cdot \left(-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi-t)}\right) \cdot dt = -\mathrm{i}\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\,(\pi-t)}dt \underbrace{=}_{n\neq -1} \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{(n+1)\mathrm{i}\,(\pi-t)}\Big|_{0}^{\pi}$$
$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{1.40a}$$

Das Ergebnis für $n \neq -1$ ist identisch zu dem unter (ii). Für $n = -1$ erhalten wir ein völlig anderes Ergebnis als unter (ii)

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi-t)}\right)^{-1} \cdot \left(-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi-t)}\right) \cdot dt = -\mathrm{i}\int_{0}^{\pi} dt = -\mathrm{i}\,\pi. \tag{1.41}$$

Bemerkung: (a) Für $n \neq -1$ hängt der Wert des Integrals nicht vom Wegverlauf ab (von der offensichtlichen Nichtdefiniertheit im Falle $n < 0$ und γ_1 einmal abgesehen).
(b) Für $n = -1$ ist die Differenz der Integrale

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_3} f(z)dz = +2\pi\mathrm{i}\,, \tag{1.42}$$