Übung 9 für Exakt Lösbare Modelle im WS 2013/2014

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 14.01.2014 Besprechung: 15.01.2014

1. **Thermodynamik**
In der Vorlesung wurden unter anderem die Integralgleichungen (hier mit 'justiertem' Minus-Zeichen)

$$\begin{aligned}
\log b\,(x) &= -\beta v \frac{N}{L} E(x) + \frac{\beta h}{2} + \left[\kappa \star \log B - \kappa_- \star \log \bar{B}\right](x) \\
\log \bar{b}\,(x) &= -\beta v \frac{N}{L} E(x) - \frac{\beta h}{2} + \left[\kappa \star \log \bar{B} - \kappa_+ \star \log \bar{B}\right](x) \\
F_i &= -\frac{1}{2\pi\beta} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \frac{1}{\mathrm{ch}\left(y + \frac{1}{g}\right)} \log\left(B\,(y)\,\bar{B}\,(y)\right)
\end{aligned}$$

eingeführt, wobei $E(x)$ die Stammfunktion von $1/\cosh x$ ist. Zeige zunächst $E(x) = 2\arctan e^x$ bzw. $E(x) = \mathrm{i}\log\tanh(x/2 + \pi\mathrm{i}/4) +$ const.

Diese Gleichungen betrachten wir für kleine g beziehungsweise für kleine I um daraus

$$F_i = -\frac{1}{2\pi\beta} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \frac{1}{\cosh\left(y + \ln\frac{T}{T_K}\right)} \log\left(B\,(y)\,\bar{B}\,(y)\right)$$

herzuleiten. Skaliere dazu zunächst y in F_i geschickt um. Was folgt daraus für B und $\bar{B}$ mit kleinem g? Führe nun eine weitere Umskalierung durch, um das gewünschte Ergebnis herzuleiten.

2. **Wiener-Hopf-Faktorisierung**
Betrachte die Integralgleichung

$$f\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' k\,(x - x')\,u\,(x') + v\,(x)\,.$$

(a) Wie kann so eine Integralgleichung auf einfachem Wege gelöst werden?

(b) Wir betrachten nun im Folgenden die Integralgleichung

$$\psi_+\,(x) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x' V\,(x - x')\,\psi_+\,(x') + g\,(x)$$

mit $x > 0$. Für diese wollen wir eine Lösung finden. Die Methode aus (a) funktioniert offensichtlich nicht. Es wird daher

$$\psi_-\,(x) = \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{d}x' V\,(x - x')\,\psi_+\,(x') + g\,(x)$$

für $x < 0$ definiert. Beide Funktionen ψ_+ und ψ_- werden auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet, wobei sie durch $\psi_+(x) = 0$ für $x < 0$ und $\psi_-(x) = 0$ für $x > 0$ erklärt sind. Es gilt nun

$$\psi_+\,(x) + \psi_-\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' k\,(x - x')\,\psi_+\,(x') + g\,(x)\,.$$

für x auf der ganzen reellen Achse. Führe nun wie in (a) die Fourierdarstellung ein. Was folgt daraus und aus den unterschiedlichen Analytizitätseigenschaften von $\tilde{\psi}_\pm(\omega)$ für ω in der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene (evtl. erst mit (c) und (d) behandelbar)?

(c) Warum kann jede auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(\omega)$ zerlegt werden in

$$f(\omega) = [f]_+(\omega) + [f]_-(\omega),$$

mit $[f]_\pm$ definiert und analytisch in der ganzen oberen/unteren Halbebene samt der reellen Achse? Überlege dies für eine Funktion $f(\omega)$, die in einer (engen) Nachbarschaft der reellen Achse analytisch ist, so daß

$$[f]_\pm(\omega) = \pm\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega' \frac{f(\omega')}{\omega - \omega' \pm i\epsilon}, \qquad (\epsilon \to 0)$$

wohldefiniert sind.

(d) Was folgt nun mittels einer Zerlegung von $\ln\left(1 - \tilde{V}(\omega)\right)$ wie in (c) um die Gleichung für $\tilde{\psi}_+(\omega) + \tilde{\psi}_-(\omega)$ umzuschreiben? Was folgt ferner aus der Zerlegung von $\tilde{g}(\omega)$ für $\tilde{\psi}_+(\omega)$?

(e) Betrachte nun das Beispiel mit $g(x) = 1$. Was folgt für $\psi_+(0)$?