Übung 6 für Exakt Lösbare Modelle im WS 2013/2014

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 03.12.2013 Besprechung: 04.12.2013

1. **Permutationsoperatoren**
   In der Vorlesung hatten wir den graduierten Permutationsoperator definiert als

$$P_{jk} = (-1)^{p(\beta)} e^{\beta}_{j\alpha} e^{\alpha}_{k\beta}.$$

   Zeige, dass folgende Relationen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
P_{jk} &= P_{kj}, \\
P_{jj} &= d \cdot \mathrm{id}, \\
P_{jk}^2 &= \mathrm{id}, \\
P_{jk} e^{\beta}_{k\alpha} &= e^{\beta}_{j\alpha} P_{jk} \\
P_{jk} e^{\beta}_{l\alpha} &= e^{\beta}_{l\alpha} P_{jk} \qquad \text{für } j \neq l \neq k, \\
P_{jk} P_{kl} &= P_{jl} P_{jk} = P_{kl} P_{jl}
\end{aligned}$$

2. **Störungstheorie**
   Betrachte das s-d-Austausch-Modell aus der Vorlesung mit einem zusätzlichen Magnetfeld h in z-Richtung am Ort des Spins $\vec{S}$. Berechne so weit wie möglich den Erwartungswert $\left\langle c^{\dagger}_{ja} \vec{\sigma} c_{j'a'} \vec{S} \right\rangle$ in erster Ordnung Störungstheorie für den Grundzustand (d.h. in zweiter Ordnung der Energie).

3. **Molekularfeldnäherung des Heisenbergmodells**
   Das dreidimensionale, ferromagnetische Heisenbergmodell in einem homogenen Magnetfeldes $\vec{B}$ der Stärke $B = |\vec{B}|$ wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \sum_{(i,j)} J_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j - h \sum_i \vec{n} \vec{S}_i$$

   mit $J_{ij} < 0$ für alle Paare (i, j) von Gitterplätzen beschrieben, wobei $h = g\mu_B B$ ist und $\vec{n}$ die Richtung des Magnetfeldes angibt. Für irgendeine Konfiguration aller Spins wirkt auf einem beliebig herausgegriffenen Spin $\vec{S}_i$ ein lokales Feld

$$\vec{h}_i = -h\vec{n} + \sum_j \frac{J_{ij}}{2} \vec{S}_j.$$

   Die Molekularfeldnäherung besteht nun darin, dass dieses lokale Feld durch seinen Mittelwert

$$\left\langle \vec{h}_i \right\rangle = -h\vec{n} + \sum_j \frac{J_{ij}}{2} \left\langle \vec{S}_j \right\rangle = -h\vec{n} + \tilde{J}\vec{m} =: \vec{h}_{\mathrm{eff}}$$

   ersetzt wird, wobei $\vec{m}$ und $\tilde{J}$ wegen der Translationsinvarianz des Hamiltonoperators vom Ort unabhängig sind.

   (a) Berechne für den Spin-1/2 Fall die Zustandssumme des Systems! Wähle hierzu als z-Richtung die Richtung von $\vec{h}_{\mathrm{eff}}$.
   (b) Bestimme nun hieraus eine Gleichung für die Magnetisierung pro Gitterplatz $m = \langle s_i^z \rangle$.
   (c) Für $h = 0$ besitzt diese immer die triviale Lösung $m = 0$. Für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur T_c gibt es zusätzliche Lösungen. Wie hängt T_c mit $\tilde{J}$ zusammen?