Übung 4 für Exakt Lösbare Modelle im WS 2013/2014

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 12.11.2013 Besprechung: 13.11.2013

1. **Jordan-Wigner-Transformation**
   Betrachte die Matrizen σ^r und ihre Einbettungen σ_j^r, $r = \pm, z$, in $\left(\mathbb{C}^2\right)^{\otimes L}$.

   (a) Zeige, dass die Matrizen

   $$c_k = \sigma_k^+ \prod_{j=1}^{k-1} \sigma_j^z, \qquad c_k^+ = \sigma_k^- \prod_{j=1}^{k-1} \sigma_j^z, \qquad k = 1, \ldots, L$$

   die Gleichungen

   $$\left\{c_j^+, c_k\right\} = \delta_{jk}, \qquad \left\{c_j, c_k\right\} = \left\{c_j^+, c_k^+\right\} = 0$$

   erfüllen.

   (b) Welcher Zustand repräsentiert das Fock-Vakuum $|0\rangle$, das durch $c_j\,|0\rangle = 0$ definiert ist?

   (c) In welchen Hamiltonoperator spinloser Fermionen geht

   $$H = \sum_{j=1}^{L-1} \left(J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right)$$

   unter der Jordan-Wigner-Transformation über?

   (d) Nun sei $J_z = 0$. Betrachte das resultierende Modell unter periodischen Randbedingungen. Diagonalisiere dieses Modell mit Hilfe geeigneter linearer Transformationen der Fermioperatoren und diskutiere das Spektrum! Was passiert für $J_x = J_y$?