Übung 3 für Exakt Lösbare Modelle im WS 2013/2014

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 05.11.2013 Besprechung: 06.11.2013

1. **Integralgleichungen**
Betrachte die Gleichungen

$$\begin{aligned}\ln\mathfrak{a}(\lambda) &= -\beta h-\beta\frac{2J\mathrm{sh}^2(i\gamma)}{\mathrm{sh}(\lambda+i\gamma)\,\mathrm{sh}\lambda}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\mu\frac{\sin(2\gamma)}{\mathrm{sh}(\lambda-\mu+i\gamma)\,\mathrm{sh}(\lambda-\mu-i\gamma)}\ln(1+\mathfrak{a}(\mu)), \qquad (1)\\ \ln\Lambda_0(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\mu\frac{\sin(i\gamma)}{\mathrm{sh}(\lambda-\mu-i\gamma)\,\mathrm{sh}(\lambda-\mu)}\ln(1+\mathfrak{a}(\mu)). \qquad (2)\end{aligned}$$

Die Kontur $\mathcal{C}$ ist eine rechteckige, unendlich ausgedehnte Kontur um Null mit oberer und unterer Kante parallel zur reellen Achse durch $\pm i\frac{\pi-\gamma-\epsilon}{2}$ mit $\epsilon\to 0$. Dann ist $\gamma\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Die obere (untere) Kante der Kontur sei $\mathcal{C}_\pm$.

(a) Zeige durch die Wahl $\lambda\in\mathcal{C}_+$, $\lambda=x+i\frac{\pi-\gamma}{2}$, dass λ und die Integrationsvariable μ in (1) auf $\mathcal{C}_-$ beschränkt werden können.

(b) Finde nun einen Ausdruck für $\ln\mathfrak{a}\left(\lambda-\frac{i\gamma}{2}\right)$ und durch ähnliche Überlegungen auch einen Ausdruck für $\ln\Lambda_0(0)$.

(c) Führe nun die Funktion $\varepsilon(\lambda)$ durch $\mathfrak{a}\left(\lambda-\frac{i\gamma}{2}\right)=e^{-\beta\varepsilon(\lambda)}$ ein und zeige die Relationen

$$\begin{aligned}\varepsilon(\lambda) &= e_0(\lambda)+\frac{T}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\mu K(\lambda-\mu)\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon(\mu)}\right), \qquad (3)\\ \ln\Lambda_0(0) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\lambda p_0'(\lambda)\ln\left(1+e^{-\beta\varepsilon(\lambda)}\right) \qquad (4)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}e_0(\lambda) &= h+\frac{2J\mathrm{sh}^2(i\gamma)}{\mathrm{sh}\left(\lambda+\frac{i\gamma}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\lambda-\frac{i\gamma}{2}\right)},\\ K(\lambda) &= \frac{\sin(2\gamma)}{\mathrm{sh}(\lambda+i\gamma)\,\mathrm{sh}(\lambda-i\gamma)},\\ p_0(\lambda) &= i\ln\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{i\gamma}{2}+\lambda\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{i\gamma}{2}-\lambda\right)}.\end{aligned}$$

(d) Führe nun den Limes $\epsilon\to 0$, $\gamma=\pi-\epsilon$, $\delta\to 0$ wie $\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$, $L\to\infty$ wie $\mathcal{O}\left(\epsilon^{-2}\right)$, $J\to\infty$ wie $\mathcal{O}\left(\epsilon^{-4}\right)$ und $h\to\infty$ wie $\mathcal{O}\left(\epsilon^{-2}\right)$ mit $2J\delta^2=1$ und $k=\frac{\epsilon}{\delta}\lambda$ durch. Führe ein chemisches Potential μ ein, sodass $e_0(\lambda)$ die Form

$$e_0(\lambda)\to k^2-\mu=\bar{e}_0(k)$$

annimmt. Was ergibt sich in diesem Limes für $p_0'(\lambda)$ und $K(\lambda)$? Der Limes von $\varepsilon(\lambda)$ sei $\bar{\varepsilon}(k)$.

(e) Welche Gleichung folgt also aus (3) für $\bar{\varepsilon}(k)$ und aus (4) für $\phi(\mu,T)=-\frac{T}{\delta^3}\ln\Lambda_0(0)$?