Übung 10 für Exakt Lösbare Modelle im WS 2013/2014

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)

Abgabe: 21.01.2014 Besprechung: 22.01.2014

1. **Hubbard-Modell**
   Betrachte den Hamiltonoperator

$$
\begin{aligned}
H(\eta) \quad &= \quad -\sum_{j,\sigma}\left(c^{\dagger}_{j\sigma}c_{j+1\sigma}+c^{\dagger}_{j+1\sigma}c_{j\sigma}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\eta-\sigma\gamma\right)n_{j,-\sigma}-\frac{1}{2}\left(\eta+\sigma\gamma\right)n_{j+1,-\sigma}\right]\\
&\qquad +\sum_{j}\left[Un_{j\uparrow}n_{j\downarrow}+t_p\left(c^{\dagger}_{j\uparrow}c^{\dagger}_{j\downarrow}c_{j+1\downarrow}c_{j+1\uparrow}+c^{\dagger}_{j+1\uparrow}c^{\dagger}_{j+1\downarrow}c_{j\downarrow}c_{j\uparrow}\right)\right]
\end{aligned}
$$

   mit den zugehörigen BA-Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sin\left(\lambda_j-ia\right)}{\sin\left(\lambda_j+ia\right)}\right)^{L} \quad &= \quad \prod_{\alpha=1}^{N_\downarrow}\frac{\sin\left(\lambda_j-\Lambda_\alpha+\frac{i\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\lambda_j-\Lambda_\alpha-\frac{i\gamma}{2}\right)},\\
\prod_{j=1}^{N}\frac{\sin\left(\Lambda_\alpha-\lambda_j+\frac{i\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\Lambda_\alpha-\lambda_j+\frac{i\gamma}{2}\right)} \quad &= \quad -\prod_{\alpha=1}^{N_\downarrow}\frac{\sin\left(\Lambda_\alpha-\Lambda_\beta+i\gamma\right)}{\sin\left(\Lambda_\alpha-\Lambda_\beta-i\gamma\right)}
\end{aligned}
$$

   und mit

$$
\begin{aligned}
a \quad &= \quad \frac{1}{4}\left(\ln\frac{\mathrm{sh}\frac{\eta+\gamma}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\eta-\gamma}{2}}-\gamma\right),\\
t_p \quad &= \quad \frac{U}{2}=\epsilon\sqrt{2e^{-\eta}\left(\mathrm{ch}\eta-\mathrm{ch}\gamma\right)}, \qquad \epsilon=\pm 1.
\end{aligned}
$$

   (a) Zeige, dass die Anwendung einer Teilchen-Loch-Transformation T zusammen mit einer Untergitter-Rotation $\left(c^{\dagger}_{j\sigma}\to(-1)^{j}c_{j\sigma}\right)$ auf $H(\eta)$

$$
TH(\eta)T^{-1}=e^{\eta}H(-\eta)+(L-N)U
$$

   liefert.

   (b) Wie sieht der isotrope Fall aus? Wie müssen η, γ und a gewählt werden?

2. **BA-Gleichungen**
   Betrachte BA-Gleichungen der Form

$$
\left(\frac{\Lambda_k-\frac{i}{2}}{\Lambda_k+\frac{i}{2}}\right)^{L}=-\prod_{l=1}^{m}\frac{\Lambda_k-\Lambda_l-i}{\Lambda_k-\Lambda_l+i}.
$$

   (a) Logarithmiere diese Gleichung! Führe den Logarithmus dabei geschickt ein, sodass $\log\frac{\Lambda_k-\frac{i}{2}}{\Lambda_k+\frac{i}{2}}$ zu Null wird für $\Lambda_k\to\infty$. Nutze die resultierende Gleichung um eine Dichtefunktion der Λ_k einzuführen!

   (b) Stelle eine Integralgleichung für die Dichtefunktion auf und löse diese.

   (c) Wie verändert sich die Rechnung, wenn die BA-Gleichungen die Form

$$
\prod_{j}\frac{\Lambda_k-\lambda_j-\frac{i}{2}}{\Lambda_k-\lambda_j+\frac{i}{2}}=-\prod_{l=1}^{m}\frac{\Lambda_k-\Lambda_l-i}{\Lambda_k-\Lambda_l+i}
$$

   haben.