Übung 1 für Exakt Lösbare Modelle im WS 2013/2014

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 22.10.2013 Besprechung: 23.04.2012

1. **Bewegungsgleichung**
   Zeige, dass für das $1d$ Bosegas mit δ-Wechselwirkung die Bewegungsgleichung
   $$i\partial_t \Psi(x,t) = -\partial_x^2 \Psi(x,t) + 2c\Psi^\dagger(x,t)\Psi(x,t)\Psi(x,t)$$
   gilt.

2. **Kommutatoren**
   Zeige, dass für die in der Vorlesung definierten Operatoren
   $$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}x \left[\left(\partial_x \Psi^\dagger(x)\right)\left(\partial_x \Psi(x)\right) + c\Psi^\dagger(x)\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\Psi(x)\right], \\ Q &= \int \mathrm{d}x \Psi^\dagger(x)\Psi(x), \\ P &= -i\int \mathrm{d}x \Psi^\dagger(x)\partial_x\Psi(x) \end{aligned}$$
   die Relationen
   $$[H,Q] = [H,P] = [Q,P] = 0$$
   gelten.

3. **Wellenfunktion**
   Zeige, dass der Hamiltonoperator im N-Teilchensektor die Form
   $$\mathcal{H}_N = -\sum_{j=1}^{N} \partial_{z_j}^2 + 2c \sum_{N\geq j>k\geq 1} \delta(z_j - z_k)$$
   hat.

4. **Randbedingung**
   Zeige, dass die Eigenfunktionen χ folgende Randbedingung zu erfüllen haben:
   $$\left(\partial_{z_{j+1}} - \partial_{z_j} - c\right)\chi = 0$$

5. **Funktionentheorie**
   Warum gilt für
   $$f(z) = \frac{\operatorname{sh}(z+ia)}{\operatorname{sh}(z-ia)}, \qquad a\in\mathbb{R}, \qquad a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
   (a) $|f(z)| < 1$ für alle $\mathrm{Im} z \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
   (b) $|f(z)| > 1$ für alle $\mathrm{Im} z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

   und warum hat die Gleichung
   $$f(z) = z_0, \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$
   genau eine Lösung in $\mathrm{Im} z \in [0,\pi)$.