9. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Prof. Dr. A. Klümper; SS 2010

Abgabe: 1.7.2010 (Postfach Nuding, Ebene 10)
Besprechung: 6.7.2010

---

27. Aufgabe (5 Punkte) : Latente Wärme

Die latente Wärme von Eis pro Masseeinheit sei Q_L. Ein Gefäß enthält eine Mischung von Wasser und Eis am Gefrierpunkt (absolute Temperatur T_0). Es soll zusätzlich Wasser der Masse m in dem Gefäß mit einem Kühlapparat gefroren werden. Die vom Kühlapparat abgegebene Wärme wird verwendet, um einen Körper der Wärmekapazität C und der Anfangstemperatur T_0 aufzuwärmen. Wie groß ist die minimale Wärmemenge, die vom Kühlapparat an den Körper abgegeben wird ? (C sei temperaturunabhängig)

28. Aufgabe (5 Punkte) : Mischentropie idealer Gase

Gegeben sei ein klassisches ideales Gas bestehend aus n Teilchensorten.

a) Berechne das chemische Potential $\mu(P, T)$ für den Fall $n = 1$. Nutze die Eigenschaften des idealen Gases aus, um das Gibbsche Potential $G(P, T, N_1, ..., N_n)$ für den allgemeinen Fall anzugeben.

b) Betrachte jetzt den Fall $n = 2$. Die beiden Systeme S_I und S_{II} seien zunächst durch eine Trennwand getrennt. Temperatur und Druck der Gase sei gleich. Wird die Trennwand entfernt, so hat jede Komponente das Volumen $V_I + V_{II}$ zur Verfügung. Betrachtet man die Entropie als Maßfür das System, dann sollte diese beim Mischvorgang ansteigen und bei völliger Durchmischung ihr Maximum erreichen. Dieser Entropiegewinn wird als Mischentropie bezeichnet. Als Folge davon erhält man eine Mischenthalpie, etc...
Berechne für den Fall $n = 2$ die Mischenthalpie und die Mischentropie des Systems. Was passiert, wenn die beiden zunächst unterscheidbaren Teilchensorten ununterscheidbar werden?
Tipp : Die Entropie eines einkomponentigen idealen Gases ist gegeben durch :

$$S = kN\left[\frac{5}{2} + \ln\left(\frac{V}{N\lambda^3}\right)\right], \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

29. Aufgabe (5 Punkte) : Kanonisches Ensemble identischer Teilchen

Für ein Ensemble von N identischen, unabhängigen Teilchen im Kontakt mit einem Thermostat lautet der Hamiltonoperator

$$H = \sum_{i=1}^{N} h_i \ .$$

Dabei ist h_i der Hamiltonoperator für das i-te Teilchen (da die Teilchen identisch sind, ist die funktionale Form der h_i gleich). Die zugehörigen Eigenzustände haben Eigenenergien so, dass $h_i|\lambda_i\rangle = \epsilon(\lambda_i)|\lambda_i\rangle$. Es sollen die Zustandssummen für den Fall unterscheidbarer (Z_u), bosonischer (Z_b) und fermionischer (Z_f) Teilchen untersucht werden.

a) Betrachte den Fall zweier Teilchen ($N = 2$) und zweier Energiezustände. Wie lauten Z_u, Z_b, Z_f? Gilt eine einfache Beziehung wie $Z_b = \frac{1}{2}\, Z_u$ oder $Z_b = \sqrt{Z_u}$?

b) Gib Z_u für den allgemeinen Fall an. Wodurch ist ein Systemzustand bestimmt?

c) Berechne Z_b und Z_f allgemein. Wie kann nun ein Systemzustand dargestellt werden?

d) Zeige, dass im Grenzfall sehr kleiner mittlerer Besetzungszahlen $n_\lambda \ll 1\ \forall\, \lambda$ gilt:

$$Z_u \to N!\, Z_{b,f}$$

Was bedeutet die Bedingung $n_\lambda \ll 1$ für das ideale Gas?

30. Aufgabe (5 Punkte): Entropie von Quantengasen

Zeige aus dem großkanonischen Potential für die Entropie eines idealen Quantengases

$$S = k \sum_{\vec{k}} \left(-n_{\vec{k}} \ln n_{\vec{k}} - \nu(1 - \nu n_{\vec{k}}) \ln(1 - \nu n_{\vec{k}}) \right) \ .$$

Betrachte diesen Ausdruck im klassischen Grenzfall und im Tieftemperaturgrenzfall.

$n_{\vec{k}}$:	Mittlere Besetzungszahl des Zustands zur Energie $\epsilon(\vec{k})$.
$\nu = -1(+1)$:	Bosonen (Fermionen)