5. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Abgabe: 20.05.2010 zu Beginn der Vorlesung

Prof. Dr. A. Klümper
Sommer 2010

---

13. Aufgabe (5 Punkte): klassisches ideales Gas

Gegeben sei ein Gas aus N wechselwirkungsfreien Teilchen in einem Volumen V.

a) Zeige für die Oberfläche der d-dimensionalen Einheitskugel

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Tipp: Beachte Aufgabe 4 und berechne das d-dimensionale Gauß-Integral in sphärischen Polarkoordinaten.

b) Berechne die Zustandsdichte des Systems auf einer Energiehyperfläche (entspricht einer 3N-dimensionalen Kugeloberfläche im Impulsraum)

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \frac{(p_i)^2}{2m}.$$

Berechne dazu zunächst die Anzahl $\Phi(E)$ der Zustände mit Energie $\leq E$ im Phasenraum.

c) Für obiges Gas gelte einmal die normale mikrokanonische Verteilung:

$$\rho_{mk1} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad E \leq H(\vec{p}, \vec{q}) \leq E + \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und dann die gleichförmige Verteilung:

$$\rho_{mk1} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad H(\vec{p}, \vec{q}) \leq E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zur Energie E, wobei Δ als infinitesimal klein angenommen werden kann. Berechne für beide Verteilungen die Erwartungswerte $\langle H \rangle$ und $\langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle$ für große N. Interpretiere das Resultat!

14. Aufgabe (5 Punkte): Carnot-Prozesse

Ein Carnot-Prozess ist ein Kreisprozess, der zwischen einer höchsten Temperatur T_2 und einer niedrigsten Temperatur T_1 verläuft und aus zwei isothermischen und zwei adiabatischen Teilprozessen besteht.

- Berechne den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses.
- Ein Körper der Temperatur T_1 wird in eine Umgebung der Temperatur $T_0 < T_1$ gebracht. Wieviel Arbeit kann durch die Abkühlung des Körpers auf die Temperatur T_0 maximal gewonnen werden?
  Die Wärmekapazität soll als konstant angenommen werden.
  (Tipp: Betrachte eine Folge infinitesimaler Carnot-Prozesse.)

15. Aufgabe (5 Punkte): Das ideale Gas

Wir benutzen hier die Zustandssumme des idealen Gases, die durch

$$\Omega(E) = \frac{3N}{2E} \cdot \frac{1}{N!\frac{3N}{2}!} \cdot \left(\frac{E}{\gamma}\right)^{3N/2}$$

mit $\gamma = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2}$ gegeben ist.

- Berechne die kanonische Zustandssumme, die Zustandssumme der großkanonischen Gesamtheit und die zugehörigen thermodynamischen Potentiale.
- Leite die Zustandsgleichung her, d.h. $p = p(T, n)$!
- Das ideale Gas durchlaufe jetzt einen Carnot-Prozess.
  a) Berechne in (p, V)-Diagramm die Isothermen und die Adiabaten. Wie sehen diese im (T, S)-Diagramm aus?
  b) Berechne die Arbeit zu jedem Schritt des Carnot-Prozesses und überprüfe explizit, dass der sich hier ergebene Wirkungsgrad in diesem speziellen Fall mit der allgemeinen Formel übereinstimmt.