4. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Abgabe: 11.05.2010, zu Beginn der Übung
oder bis 12.05. (15:00 Uhr) im Postfach Aufgebauer

Prof. Dr. A. Klümper
Sommer 2010

---

10. Aufgabe (5 Punkte): Extremaleigenschaft der Entropie

Zeige, dass die großkanonische Verteilung $\rho_g(T, \mu, p)$ unter allen Verteilungen zu vorgegebenen Mittelwerten von Energie E, Teilchenzahl N und Volumen V die größte Entropie besitzt. Tipp: Benutze die relative Entropie aus Aufgabe 9.

11. Aufgabe (5 Punkte): Thermodynamik eines 2-Niveau-Systems

Betrachte das allgemeine 2-Niveau-System aus der 2. Aufgabe, dessen Energie E nun proportional zu $m := n_+ - n_-$ sei, $E_m = h\,m$ mit einem verallgemeinerten Feld h (zum Beispiel unabhängige Spin-$\frac{1}{2}$-Objekte in einem äußeren Magnetfeld). Das System sei isoliert und abgeschlossen: Mikrokanonische Gesamtheit.

a) Benutze die Ergebnisse der Aufgabenteile 2.a) und 4.b), um die Anzahl der möglichen Zustände zu gegebener Energie $\Omega(e)$ und daraus die Entropie $S(e)$ zu berechnen, wobei $e \overset{def}{=} \frac{E}{hN}$ die reduzierte Energie ist.

b) i) Berechne die Temperatur $T(e)$ und skizziere die Kurven $S(e)$, $T(e)$. Es treten negative Temperaturen auf. Sind diese "kälter" oder "wärmer" als positive Temperaturen?

   ii) Was ist der physikalische Grund für das Auftreten negativer Temperaturen? Wodurch wird die experimentelle Realisierung erschwert?

c) Das System werde nun als kanonische Gesamtheit angesehen, die durch Kontakt mit einem Wärmebad realisiert wird (unter Erhaltung der Teilchenzahl).
Berechne die kanonische Zustandssumme $Z_k(\beta) = \mathrm{Sp}(e^{-\beta H}) = (2\cosh \beta h)^N$ und daraus $T(e)$. Vergleiche mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b)i).

d) Sowohl die Temperatur T als auch die Energie E sind proportional zum Feld h. Wie ist es aufgrund dessen möglich, das System durch Veränderung des Feldes abzukühlen?

12. Aufgabe (5 Punkte): Thermodynamik eines Oszillatorensembles

Die Energieniveaus eines harmonischen, eindimensionalen Oszillators der Frequenz ω sind

$$E(n) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \ .$$

Gegeben sei ein abgeschlossenes, isoliertes Ensemble von N ($N \gg 1$) unabhängigen harmonischen eindimensionalen Oszillatoren der Gesamtenergie

$$E = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega(\frac{1}{2} + n_i) = \hbar\omega(\frac{1}{2}N + M).$$

a) Benutze ein kombinatorisches Argument in Analogie zu Aufgabe 1, um die Anzahl möglicher Zustände $\Omega(e)$ und daraus die Entropie des Systems $S(e)$ in den Grenzen $N \gg 1$, $M \gg 1$ zu bestimmen ($e = \frac{E}{N\hbar\omega}$).

b) Bestimme $T(e)$ und $e(T)$. Skizziere $e(T)$.

c) Das Ensemble sei nun im Kontakt mit einem Wärmebad. Berechne die kanonische Zustandssumme

$$Z_k = \mathrm{Sp}(e^{-\beta H}), \ H = \sum_j \hbar\omega \left(a_j^+ a_j + \frac{1}{2} \right)$$

durch Wahl einer geeigneten Basis bei der Spurbildung. Leite daraus die Entropie $S(T)$ und die reduzierte Energie $e(T)$ ab.