3. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Abgabe: 06.05.2010, zu Beginn der Vorlesung.

Prof. Dr. A. Klümper
Sommer 2010

---

7. Aufgabe (5 P) : 2 Spin-1/2 Spins

Gegeben sei ein System von zwei Spin-1/2 Spins, welches sich im (reinen) Zustand $|\Psi\rangle$ befindet. Allgemein ist $|\Psi\rangle$ eine Linearkombination aus den 4 Zuständen $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ (siehe Blatt 0).

a) Berechne den Dichteoperator ρ_{ges}.

b) Aus dem Dichteoperator ρ_{ges} des Gesamtsystems soll nun der Dichteoperator ρ_1 für den Spin Nr.1 berechnet werden. Dazu wir die Teilspur im Zustandsraum des Spins Nr. 2 gebildet. (Siehe Blatt 0)

$$\rho_1 = \mathrm{Sp}_2\left(\rho_{ges}\right)$$

Prüfe, in welchem Fall sich das Teilsystem Spin Nr. 1 in einem reinen Zustand befindet.

c) Betrachte für die Dichteoperatoren ρ_{ges} und ρ_1 die Entropie

$$S = -k_B\, \mathrm{Sp}_x\left(\rho_x \ln(\rho_x)\right).$$

S kann als Maß für die Information, die man über des Teilsystem hat, angesehen werden, wobei der Wert 0 die volle Information über das jeweilige System bedeutet. Interpretiere das Ergebnis!

d) Berechne die folgenden Größen

i) $\langle\Psi|\, S_1^z\, |\Psi\rangle$ und $\langle\Psi|\, (S_1^z)^2\, |\Psi\rangle$

ii) $\mathrm{Sp}_{ges}\left(\rho_{ges} S_1^z\right)$ und $\mathrm{Sp}_{ges}\left(\rho_{ges} (S_1^z)^2\right)$

iii) $\mathrm{Sp}_1\left(\rho_1 S_1^z\right)$ und $\mathrm{Sp}_1\left(\rho_1 (S_1^z)^2\right)$

Welche Bedeutung haben diese Größen?

8. Aufgabe (5 P) : Gibbsscher Satz

Der Gibbssche Satz lautet:
Ein kleiner, aber noch makroskopischer, Teil einer mikrokanonischen Gesamtheit ist bezüglich seiner Energie kanonisch verteilt.

Gegeben sei ein abgeschlossenes System (mikrokanonische Gesamtheit), das in zwei Teilsysteme (Laborsystem bzw. Wärmebad) aufgeteilt wird. Dabei soll das Laborsystem zwar makroskopisch, aber dennoch sehr viel kleiner als das Wärmebad sein. Daraus folgt für die Energien der Systeme:

$$E_{ges} = E_L + E_W \quad \text{und} \quad E_L << E_W.$$

$\Omega_{L/W}(E_{L/W})$ sei die Zahl der Zustände des Laborsystems/Wärmebads im Intervall dE um $E_{L/W}$. Nutze die mikrokanonische Definition der Temperatur aus, um den Gibbsschen Satz zu zeigen.

9. Aufgabe (5 P) : Eigenschaften der Entropie

Die *relative Entropie* $S(\rho|\sigma)$ zweier Dichteoperatoren ρ und σ ist definiert als

$$S(\rho|\sigma) = \mathrm{Sp}(\rho(\ln(\rho) - \ln(\sigma))).$$

a) Eine differenzierbare reelle Funktion f einer reellen Variable x heißt konkav, wenn

$$f(y) - f(x) \leq (y - x)f'(x) \qquad \forall x, y.$$

Beweise für Observable A, B und konkaves f

$$\mathrm{Sp}(f(B) - f(A)) \leq \mathrm{Sp}(B - A)f'(A).$$

Zeige, dass $f(x) = -x\ \ln(x)$ konkav ist für $x > 0$.

b) Zeige unter Benutzung der Ergebnisse aus a), dass $S(\rho|\sigma) \geq 0$ für beliebige Dichteoperatoren ρ, σ gilt.

c) Der zu ρ gehörige Zustandsraum sei d-dimensional. Beweise mit Hilfe von b) die Ungleichung für die Entropie:

$$S(\rho) \leq \ln(d).$$

d) Benutze die Nichtnegativität der relativen Entropie, um die *Subadditivität* der Entropien zu zeigen:

$$S(\rho_{12}) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2).$$

ρ_1 bezeichnet den Dichteoperator des Systems 1, ρ_2 den Dichteoperator des Systems 2 und ρ_{12} den Dichteoperator des Gesamtsystems (bestehend aus System 1 und System 2).