2. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Abgabe: 29.04.2010, zu Beginn der Vorlesung.

Prof. Dr. A. Klümper
Sommer 2010

---

4. Aufgabe (5 P) : Stirling-Formel

Die Integraldarstellung der Gammafunktion für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ lautet

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

a) Zeige für $n \in \mathbb{N}^{>0}$, dass $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ und $\Gamma(1) = 1$ gilt. Folgere daraus $n! = \Gamma(n+1)$.

b) Beweise die Stirling-Formel

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t+n\ln(t)}\, dt \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}$$

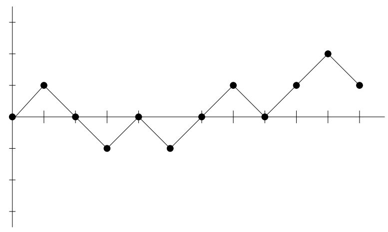
durch Entwickeln des Exponenten im Integral um sein Maximum bis zur quadratischen Ordnung.

5. Aufgabe (5 P) : Gerichtetes Kettenmolekül

In einem vereinfachten Modell sei angenommen, dass ein Kettenmolekül nur folgende Zustände annehmen kann: Die N Atome befinden sich auf Positionen (x_i, y_i) eines Quadratgitters (x_i, y_i ganzzahlig). Der Anfang der Kette sei bei $x_0 = y_0 = 0$ fixiert. Die weiteren Atome seien mit den Bedingungen

$$x_i - x_{i-1} = 1 \quad \text{und} \quad |y_i - y_{i-1}| = 1$$

an dieses angehängt. Damit ist die Kette in x-Richtung ausgerichtet und kann keine Schleifen bilden.



a) Berechne die Anzahl aller möglichen Mikrozustände!

b) Ein Makrozustand (N, y) sei die Gesamtheit aller Mikrozustände mit Kettenende bei $y_N = y$. Wie groß ist die Anzahl $W(N, y)$ der zugehörigen Mikrozustände?

c) Sei analog ein Makrozustand (i, y) durch Angabe der Position $y_i = y$ des i-ten Atoms definiert. Wie groß ist dann die Zahl der zugehörigen Mikrozustände? Berechne außerdem $\sum_y W(i, y)$.

d) Berechne die mittlere Auslenkung des Kettenendes

$$\bar{y} = \left(\frac{\sum_y y^2 \, W(N,y)}{\sum_y W(N,y)} \right)^{1/2} .$$

Tipp: Die Summe kann durch den Trick $y = \frac{d}{dz} z^y |_{z=1}$ berechnet werden.

6. Aufgabe (5 P) : Zentraler Grenzwertsatz

Eine Zufallsvariable X unterliege einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\omega(x)$, so dass der Mittelwert $\bar{x}$ und die Schwankung Δx, gegeben durch

$$\bar{x} = \int x \, \omega(x) \, dx \quad \text{bzw} \quad (\Delta x)^2 = \int (x - \bar{x})^2 \, \omega(x) \, dx,$$

endlich sind.
Aus N gleichartigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ bilden wir die neue Zufallsvariable

$$Y := \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N).$$

a) Berechne Mittelwert und Schwankung von Y!

b) Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\omega(y)$!

Tipp zu Teilaufgabe b): Betrachte die erzeugende Funktion $\chi(t) = \int e^{ity} \, \omega(y) \, dy$. Zeige zunächst $\chi(t) = [\Phi(t/N)]^N$ mit $\Phi(t) = \int e^{itx} \, \omega(x) \, dx$. Entwickle dann $\ln(\chi)$ nach Potenzen von N^{-1} bis zur 2. Ordnung. Benutze Aufgabe 2 b) vom 1. Übungsblatt und finde die gesuchte Verteilung durch Fourierrücktransformation von $\chi(t)$!