11. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Prof. Dr. A. Klümper; SS 2010

Abgabe: 15.7.2010 (Postfach Nuding, Ebene 10)
Besprechung: 20.7.2010

---

34. Aufgabe (5 Punkte): Ideales Fermigas bei $T = 0$

In der Vorlesung wurde das ideale Fermigas bei $T = 0$ betrachtet und die durchschnittliche Teilchenzahl N berechnet (siehe Vorlesung Formel (2.73)) so wie die Begriffe der Fermi-Temperatur und des Fermi-Impulses eingefürt. Berechne die Grundzustandsenergie bei $T = 0$ einmal in Abhängigkeit vom Fermi-Impuls und einmal in Abhängigkeit von Teilchenzahl und Fermi-Energie. Folgere aus diesem Ergebnis den Druck des idealen Fermigases bei $T = 0$.

35. Aufgabe (5 Punkte): Eindimensionales Elektronengas

Betrachtet wird ein eindimensionales Elektronengas mit $S = 1/2$, das aus N Teilchen im Raumintervall $(0, L)$ besteht.

a) Wie groß sind Fermi - Impuls p_F und Fermi Energie ϵ_F?

b) Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Sommerfeld-Enwicklung, um das chemische Potential $\mu(T, N/L)$ zu berechnen.

c) Wie unterscheidet sich das Ergebnis in b) vom Ergebnis für drei Dimensionen? Welche physikalische Erklärung gibt es für dieses qualitativ unterschiedliche Verhalten?

36. Aufgabe (5 Punkte): Pauli Paramagnetismus

Im äußeren Magnetfeld verschiebt sich die Einteilchenenergie eines Gases freier Spin-1/2

Fermionen gemäß

$$\epsilon_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \to \epsilon_{\vec{p},s} = \epsilon_{\vec{p}} + \sigma\mu_B B.$$

Dabei ist $\sigma = \pm 1$ die Spinkomponente im Magnetfeld und $\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ ist das Bohrsche Magneton. Dadurch erhält man bei gleichem chemischen Potential μ verschiedene Verteilungsfunktionen $\langle n_{\vec{p},s}\rangle$. Magnetisierung und Suszeptibilität sind definiert durch

$$M = -\mu_B(\langle N_+\rangle - \langle N_-\rangle) \quad \text{mit} \quad N_\sigma = \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p},s}, \quad \chi(T, B) = \left.\frac{\partial B}{\partial M}\right|_{T,N}.$$

a) Zeige: $\chi(T, 0) = \mu_B^2 N \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon\, D'(\epsilon) f(\epsilon)$. Dabei ist D die Einteilchenzustandsdichte und f die Fermifunktion zum chemischen Potential μ.

b) Berechne $\chi(T, 0)$ bis zur Ordnung $O(T^2)$ einschließlich (Sommerfeld Entwicklung) bei vorgegebener Teilchenzahl N (die Temperaturabhängigkeit von μ ist zu berücksichtigen). Wie lautet das Ergebnis, wenn $\epsilon_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ gilt?

37. Aufgabe (5 Punkte): Landauscher Diamagnetismus

Wir betrachten freie Elektronen in einem schwachen, homogenen Magnetfeld B, das in z-Richtung zeigt.

a) Zeige, dass die Bahnbewegung eines Elektrons quantisiert ist und die Energieniveaus durch

$$\epsilon = \frac{p_z^2}{2m} + (2n+1)\mu_B B; \qquad p_z = -\infty, \ldots, \infty; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gegeben sind. Dabei berücksichtigen wir die Kopplung des Spins an das Magnetfeld nicht, da dies zum Paulischen Paramagnetismus führt, der schon in Aufgabe 35 besprochen wurde.
Tipp: Gehe von $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2$ aus und nutze dann die Landaueichung für das Vektorpotential $\vec{A}$.

b) Berechne die Zahl der Zustände im Intervall dp_z bei festgehaltenem n.

c) Zeige, dass aus der *Euler-McLaurin Formel*

$$\frac{1}{2}F(a) + \sum_{n=1}^{\infty} F(a+n) \approx \int_a^{\infty} F(x)\,dx - \frac{1}{12}F'(a)$$

die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n+1/2) \approx \int_a^{\infty} F(x)\,dx + \frac{1}{24}F'(0)$$

folgt.

d) Berechne die großkanonische Zustandssumme Φ für das System und nutze die Näherungsformel aus Teil c), um diese zu vereinfachen.

e) Errechne nun die magnetische Suszeptibilität $\chi = \partial^2\Phi/\partial B^2$ für tiefe Temperaturen und vergleiche dann das Ergebnis mit dem führenden, temperaturunabhängigen Term der paramagnetischen Suszeptibilität aus Aufgabe 35. Bei richtiger Rechnung sollte

$$\chi_{Dia} = -\frac{1}{3}\chi_{Para}$$

gelten.