10. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Prof. Dr. A. Klümper; SS 2010

Abgabe: 08.07.2010 (Postfach Aufgebauer, Ebene 10)
Besprechung: 13.07.2010

---

31. Aufgabe (5 Punkte): Singularitäten und thermodynamischer Limes

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass Nichtanalytizitäten bei thermodynamischen Größen nur im thermodynamischen Limes auftreten. Um dies etwas näher zu beleuchten, wollen wir ein Modell betrachten, das bei vorgegebenem Volumen V und chemischem Potential μ durch folgende Zustandssumme beschrieben wird:

$$Z_g = (1+z)^V \left(1 + z^{\alpha V}\right) \quad \text{mit } z = e^{\beta\mu} \text{ und } \alpha > 0 \text{ konstant.}$$

a) Berechne die Nullstellen von Z_g in z und betrachte ihr Verhalten im Limes $V \to \infty$.

b) Berechne den Druck $p(z, V)$ und zeige, dass diese Funktion im Limes $V \to \infty$ gegen eine stetige Funktion konvergiert. Diese ist allerdings nicht überall analytisch. Wo nicht? Skizziere $p(z)$ für $V \to \infty$.

c) Zeige, dass $\frac{1}{v} = \frac{1}{V} z \frac{\partial \ln(Z_g)}{\partial z}$ mit $v = \frac{V}{N}$ gilt. Führe den thermodynamischen Limes durch und zeichne die Funktion $\frac{1}{v}(z)$.

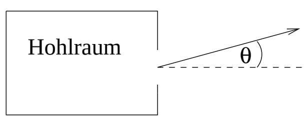
d) Eliminiere z grafisch, d.h. zeichne die Funktion $p(v)$.

32. Aufgabe (5 Punkte): Schwarzkörperstrahlung

In der Vorlesung wurde das Plancksche Strahlungsgesetz für die Hohlraumstrahlung hergeleitet. Dieses besagt, dass die spektrale Energiedichte (Energie pro Volumen- und Frequenzeinheit) der Strahlung gegeben ist durch

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}.$$

Wir wollen jetzt die von einer Öffnung des Hohlraums abgestrahlte Leistung berechnen. Die Strahlung im Hohlraum ist völlig isotrop, d.h. $u(\omega)\, d\Omega/(4\pi)$ ist die spektrale Energiedichte der Strahlung in den Einheitsraumwinkel $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$. Die Wände des Hohlraums sollen die auf sie treffende Strahlung vollständig absorbieren und ohne Änderung des Einfallswinkels oder der Frequenz wieder emittieren.



Begründe, dass die pro Zeiteinheit durch die Einheitsfläche der Öffnung austretende Strahlungsenergie (der Strahlung mit Frequenz ω) durch

$$I(\omega, T) = \frac{1}{4\pi} \int_{HK} c\, \cos(\theta)\, u(\omega) d\Omega$$

gegeben ist, wobei sich die Integration über eine Halbkugel erstreckt (siehe Skizze). Berechne $I(\omega, T)$ und anschließend durch Integration über die Frequenz die abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit der Öffnung.

33. Aufgabe (5 Punkte) : Elektronen in Graphit

Die Kohlenstoffatome in Graphit bilden äquidistante, parallele Ebenen. Wir berücksichtigen die Kristallstruktur nicht und nehmen an, dass sich die Leitungsbandelektronen nur in diesen Ebenen (!) und dort frei bewegen. Wir können dann von einer homogenen Oberflächendichte von $n = 7.18 \cdot 10^{16}$ Elektronen pro m^2 ausgehen.

a) Wie sieht die Fermioberfläche bei $T = 0$K aus? Gib den numerischen Wert der Größe an, die diese Fläche charakterisiert.

b) Bestimme das chemische Potential als Funktion der Temperatur T und der Fermitemperatur T_F, $\mu(T, T_F)$. Skizziere μ als Funktion von T.

c) Berechne die mittlere Energie als Funktion der Temperatur, $E(T)$, sowie, davon ausgehend, die spezifische Wärme bei konstanter Fläche A und Teilchenzahl, $C_A(T, T_F)$. Skizziere $C_A(T)$ unter besonderer Berücksichtigung des Tief- und Hochtemperaturverhaltens.

   Hinweis: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.