1. Übungsblatt zur Vorlesung Statistische Mechanik

Abgabe: 22.04.2010, zu Beginn der Vorlesung.

Prof. Dr. A. Klümper
Sommer 2010

---

1. Aufgabe (5 P) : Statistisch unabhängige Ereignisse

Gegeben seien drei verschiedenfarbige Würfel. Ein *Makrozustand* sei durch die Angabe der gewürfelten Ziffern charakterisiert, z.B. {4,2,1}. Dieser kann durch verschiedene Mikrozustände (Angabe der Ziffern und der zugehörigen Farben) verwirklicht werden.

a) Sind die Mikrozustände gleichwahrscheinlich? Die Makrozustände?

b) Wie viele Makrozustände gibt es?
Hinweis: Es handelt sich um das Problem, $m = 3$ ununterscheidbare Kugeln auf $n = 6$ Fächer zu verteilen, wobei jedes Fach bis zu drei Kugeln aufnehmen kann. Die Makrozustände sind dann durch geeignete Permutationen von $m + n - 1$ vielen Objekten (die Kugeln und die Trennwände zwischen den Fächern) gegeben.

c) Gib die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Makrozustände i) - v) an.

i) {4,2,1}
ii) $\{1,1,y\}$ mit $y \neq 1$
iii) $\{x, x, x\}$
iv) $\{x, x, y\}$ mit $x \neq y$
v) $\{x, y, z\}$ mit $x \neq y \neq z$

Überprüfe, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten von iii), iv) und v) gleich eins ist.

2. Aufgabe (5 P) : Ensemble von 2-Niveau-Systemen

Man betrachte ein Ensemble von N identischen Objekten. Jedes Objekt nimmt mit der Wahrscheinlichkeit $p_+(p_-)$ den Zustand $+(-)$ an. Die p_+, p_- sind statistisch unabhängig. Wir nennen $P_N(n_+)$ die Wahrscheinlichkeit, das Ensemble in einem Zustand mit n_+ Objekten im Zustand $+$ anzutreffen (die Angabe von n_+ definiert einen *Makrozustand* des Ensembles).

a) Wie viele Möglichkeiten (*Mikrozustände*) gibt es, einen solchen Zustand zu realisieren? Leite daraus $P_N(n_+)$ ab. Verifiziere:

$$\sum_{n_+} P_N(n_+) = 1 \ .$$

Wieviele Mikrozustände gibt es insgesamt?

b) Die *erzeugende Funktion* $\chi_N(\lambda)$ ist definiert als

$$\chi_N(\lambda) = \sum_{n_+=0}^{N} e^{\lambda n_+} P_N(n_+) \ .$$

Entwickle $\chi_N(\lambda)$ in Potenzen nach λ, ohne die konkrete Form von $P_N(n_+)$ zu berücksichtigen. Welche Bedeutung haben der lineare und der quadratische Term?

c) Berechne $\chi_N(\lambda)$ explizit mit $P_N(n_+)$ aus Aufgabenteil a). Unter Verwendung der Ergebnisse aus Teil b) gebe man den Mittelwert $\bar{n}_+$ und die Standardabweichung Δn an.

d) Zeige, dass im Grenzfall $p_+ \ll 1$, $N \gg 1$, Np_+ endlich, eine Poissonverteilung resultiert:

$$P_N(n_+) \to \frac{(\bar{n}_+)^{n_+}}{n_+!} exp(-\bar{n}_+)$$

3. Aufgabe (5 P): Erwartungs- und Schätzwerte

N Messungen einer Größe A liefern Ergebnisse $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(N)}$. A selbst kann Werte aus der Menge $\{a_1, \cdots a_M\}$ annehmen.
Das arithmetische Mittel A_N und die Varianz V_N über alle Messungen sind definiert durch

$$A_N \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A^{(i)} \quad \text{bzw.} \quad V_N \stackrel{def}{=} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(A^{(i)} - A_N\right)^2 .$$

a) Die N Messungen werden durch Angabe der Häufigkeit n_k, mit der der Wert a_k gemessen wurde, beschrieben. Formuliere den
Erwartungswert $\bar{A} \stackrel{def}{=} \lim_{N\to\infty} A_N$ und die *Standardabweichung* $\Delta A \stackrel{def}{=} \sqrt{\lim_{N\to\infty} V_N}$
unter Einführung der Größen $w_k \stackrel{def}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{n_k}{N}$. Zeige

$$(\Delta A)^2 = \overline{(A - \bar{A})^2} \ .$$

Welche Bedeutung haben die w_k? Nenne grundlegende Eigenschaften.

b) Eine Größe A wie oben betrachtet, die gewisse (Mess-)Werte nach einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert, nennt man auch stochastische Variable.
Wir nun betrachten ein *Ensemble* (n viele gleichartige unkorrelierte Objekte), an dem Messungen durchgeführt werden, so dass man pro Messung Werte $A_1, \cdots, A_n$ zu den Objekten $1, \cdots, n$ erhält. Wir wollen jeden Wert A_i als stochastische Variable auffassen (Achtung: Wechsel der Notation im Vergleich zu oben). Da weder Erwartungswert a noch Standardabweichung Δa der Variablen A_i bekannt sind, ist man an Schätzwerten für diese Größen interessiert.
Formuliere das arithmetische Mittel A und die Varianz V über eine Messung der n Groessen $A_1, \cdots, A_n$. Zeige für den Erwartungswert von A ($\bar{A}$) und den Erwartungswert von V ($\bar{V}$):

$$\bar{A} = a; \ \bar{V} = (\Delta a)^2 \ .$$