Übung 4 für Theoretische Festkörperphysik im WS 2012

Britta Aufgebauer (britta@physik.uni-wuppertal.de D.10.05)
Yahya Öz (yahya_oez@msn.com G.11.07)
Abgabe: 07.11.2012 Besprechung: 09.11.2012

1. **Abstand von zwei Fermionen (12 Punkte)**
Ein rechteckiges Volumen V mit periodischen Randbedingungen sei bis zur Fermikante k_F gefüllt mit N nichtwechselwirkenden, spinlosen Fermionen. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit berechnen, wie nah sich zwei willkürlich gewählte Fermionen kommen. Die normierten Einteilchenwellenfunktionen sind

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x}) = \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{V}}.$$

Wegen der periodischen Randbedingungen sind die Wellenvektoren $\vec{k}$ diskret. Da wir Fermionen betrachten ist die Wellenfunktion $\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ antisymmetrisch.

   (a) Betrachte zunächst zwei Fermionen mit unterschiedlichen Wellenvektoren $\vec{k}$ und $\vec{q}$. Wie lautet die Wellenfunktion $\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ explizit.

   (b) Führe nun die Koordinaten $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ und $\vec{R} = \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{2}$ ein und berechne $|\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2$.

   (c) Berechne und skizziere die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3R \, |\phi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)|^2 .$$

   (d) Wenn das Volumen mit N Fermionen bis zur Fermikante k_f gefüllt ist, wird die Berechnung in analoger Weise durchgeführt. Aus der Wellenfunktion $\phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung für zwei Fermionen durch die Integration über alle $\vec{x}_l$ außer über zwei lokale Freiheitsgrade $(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$. Da wir das Volumen V als groß annehmen können, füllen die Wellenvektoren $\vec{k}$ die Fermikugel mit dem Radius k_f kontinuierlich aus. Zeige, dass nun die Wahrscheinlichkeit gegeben ist über

$$\rho(r) = \frac{1}{V}\left(1 - 9\left(\frac{\sin(k_f r) - k_f r\cos(k_f r)}{(k_f r)^3}\right)^2\right), \qquad r = |\vec{x}_i - \vec{x}_j| .$$

   Skizziere $\rho(r)$.

2. **Landau Quantisierung (8 Punkte)**
Betrachte ein Elektron in einem magnetischen Feld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 .$$

Die Eichung $\vec{A} = Bx\vec{e}_y$ erfüllt $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und $\vec{p}\vec{A} = \vec{A}\vec{p}$.

   (a) Berechne die Energieeigenwerte. Hinweis: Nutze als Ansatz $\psi(\vec{r}) = \phi(x)\, e^{ik_y y} e^{ik_z z}$ und denke an den Harmonischen Oszillator.

   (b) Bestimme den Grad der Entartung. Nimm periodische Randbedingungen in y-Richtung an: $k_y = \frac{2\pi l_y}{L_y}$, $l_y \in \mathbb{N}$ und nutze die Bedingung, dass der Mittelpunkt des Oszillators x_0 beschränkt ist durch $0 \le x_0 \le L_x$.