Übung 8 für Mathematische Methoden der Physik im SS 2013

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Yahya Öz (y.oez@uni-wuppertal.de G.11.07)
Abgabe: 11.06.2013 Besprechung: 12.06.2013

1. **Gradientenfeld und Äquipotentiallinien** (5)
Es soll gezeigt werden, dass für eine holomorphe Funktion $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ die Äquipotentiallinien von $u(x,y)$, definiert durch $u(x,y) = \text{const.}$, senkrecht auf denen von $v(x,y)$ stehen. Zeige zunächst $\vec{\nabla}u(x,y) \perp (u(x,y) = \text{const.})$, $\vec{\nabla}v(x,y) \perp (v(x,y) = \text{const.})$ und $\vec{\nabla}u(x,y) \perp \vec{\nabla}v(x,y)$ und damit dann $\vec{\nabla}u(x,y) \parallel (v(x,y) = \text{const.})$, $\vec{\nabla}v(x,y) \parallel (u(x,y) = \text{const.})$ und $(u(x,y) = \text{const.}) \parallel (v(x,y) = \text{const.})$.

2. **Möbiustransformationen** (7)
Betrachte die Abbildung
$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } ad - bc = 1 \text{ und } a,b,c,d \in \mathbb{C}.$$
Wir interessieren uns für das Verhalten dieser Abbildung, insbesondere wie sich der Punkt $-i$, der Kreis $\varphi \mapsto e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$, und die Gerade $t \mapsto i + t, t \in \mathbb{R}$, in den vier Fällen
   (a) $a = d = 1$, $b = i$, $c = 0$,
   (b) $a = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $b = c = 0$, $d = e^{-\frac{\pi i}{4}}$,
   (c) $a = \sqrt{3}$, $b = c = 0$, $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
   (d) $a = d = 1$, $b = 0$, $c = i$,

   transformieren. Fertige hierzu jeweils eine Skizze an, die das Verhalten der Abbildung zeigt (Urbild und Bild in ein Koordinatensystem einzeichnen) und begründe diese!

3. **Joukowski-Funktion** (8)
Betrachte die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, die durch
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
definiert ist.
   (a) Zeige durch Einführen von Polarkoordinaten r und φ, dass ein Kreis mit Radius $r \neq 1$ durch die Joukowski-Funktion auf eine Ellipse mit Halbachsen $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ und $\frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$ und Brennpunkten bei ± 1 abgebildet wird.
   (b) Zeige, dass das Bild einer Geraden $r \mapsto re^{i\varphi}, r \in \mathbb{R}, \varphi \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$ fest, ein Hyperbelast mit Brennpunkten bei ± 1 ist.
   (c) Zeige, dass die offene Menge $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$ durch f konform auf die längs der reellen Achse von -1 bis 1 geschlitzte Ebene abgebildet wird.
   (d) Zeichne die Urbilder aus Teil (a) für $r = 2, 3, 4$ und aus Teil (b) für $\varphi = \frac{\pi n}{6}, n = 1, 2, 4, 5$ zusammen in ein Koordinatensystem. Skizziere für die gleichen Parameter in einem weiteren Koordinatensystem die Bilder von f. Was lässt sich über die Winkel an den Schnittpunkten sagen?