Gruppen- und Darstellungstheorie in der Physik – Sommer 2014

Übung 9

Prof. Dr. Andreas Klümper (kluemper@uni-wuppertal.de D.10.07)
Abgabe: 08.07.2014 Besprechung: 08.07.2014

13. Tensorprodukte von $su(3)$-Darstellungen

Wir betrachten hier die definierende Darstellung der $su(3)$, die wir D_3 nennen wollen und die komplex-konjugierte Darstellung $\bar{D}_3$, die natürlich ebenfalls 3-dimensional ist. Im weiteren wollen wir die Darstellungen $D_3 \otimes D_3$ als auch die $D_3 \otimes \bar{D}_3$ untersuchen, die reduzibel sind. Wir wollen beide Produkte ausreduzieren.

Dabei bezeichnet $D_3 \otimes D_3$ eine Darstellung in einem $3 \cdot 3 = 9$-dimensionalen Raum mit Basis aus den Tensorprodukten von je zwei Basis-Vektoren aus den beiden 3-dimensionalen Räumen. Hier ist aber nur von Interesse, daß es 9 Vektoren gibt, deren Gewichte sich aus der Summe von je einem Gewicht aus der ersten Darstellung sowie aus einem Gewicht der zweiten Darstellung ergeben. Konstruiere diese Summen (gewisse Gewichte kommen mehrmals vor).

Bestimme im nächsten Schritt das höchste Gewicht und identifiziere die zugehörigen anderen Gewichte, die durch Anwendung der Auf- und Absteiger entstehen und eine aus Aufgabe 12 bekannte Darstellung liefern. Welche Gewichte unter den insgesamt 9 vielen bleiben übrig und welche Darstellung realisieren diese?

Führe dieselbe Prozedur für $D_3 \otimes \bar{D}_3$ aus.

14. Die allgemeine $su(n)$

Wir können eine Basis der Cartanschen Unteralgebra in der definierenden n-dimensionalen Darstellung systematisch aufstellen, indem wir spurfreie Diagonalmatrizen der Form

$$H_j = (...) \cdot \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -j, 0, ..., 0), \qquad j = 1, ..., n-1,$$

betrachten, wobei es auf der Diagonalen j-viele Elemente 1 gibt und $n - j - 1$ häufig 0. Wie ist H_j zu normieren, damit

$$\mathrm{Sp}(H_a H_b) = \frac{1}{2}\delta_{a,b}$$

gilt?

Bestimme die Gewichtsvektoren $\nu^1, ..., \nu^n$ der definierenden Darstellung (nicht rechnen: es ist schon alles diagonal).

Wir nehmen nun die Anordnung der Basis der Cartanschen Unteralgebra wie folgt vor: $H_{n-1}, ..., H_2, H_1$, was zu einer Ordnungsrelation der Gewichtsvektoren führt. Falls die $\nu^1, ..., \nu^n$ schon wie $\nu^1 < ... < \nu^n$ geordnet sind, ergeben sich die einfachen Wurzeln als $\alpha^j := \nu^j - \nu^{j+1}$.

Berechne, wenn die Zeit noch reicht, die Skalarprodukte $\alpha^i \cdot \alpha^j$.